

ТВОРЕНІЯ
АРХИМЕДА.



АРХИМЕДА

ДВѢ КНИГИ

О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ, ИЗМѢРЕНІЕ КРУГА И ЛЕММЫ.

ПЕРЕВОДЪ СЪ ГРЕЧЕСКАГО
(ЛЕММЫ СЪ ЛАТИНСКАГО)
Ө. ПЕТРУШЕВСКАГО.

Съ примѣчаніями и пополненіями.



ф. 32

САНКТПЕТЕРБУРГЪ,

ВЪ ТИПОГРАФІИ ДЕПАРТАМЕНТА НАРОДНАГО
ПРОСВѢЩЕНІЯ.

1825.

(Archimedes), vir stupendæ sagacitatis, qui prima fundamenta posuit inventionum ferè omnium, de quibus promovendis ætas nostra gloriatur.

WALLIS.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи, до выпуска изъ Типографіи, представлены были въ Цензурный Комитетъ *сели* экземпляровъ сей книги для препровожденія куда слѣдуетъ, на основаніи узаконеній. Санктпетербургъ, Іюля 24 дня, 1822 года.

Цензоръ А. Бируковъ.





ПРЕДИСЛОВІЕ.

Архимедъ , величайшій Геометръ древнихъ вѣковъ , родился за 287 лѣтъ до Р. Х. въ Сиракузахъ , отъ одной знаменитой фамиліи. Будучи еще въ молодыхъ лѣтахъ , но съ основательными познаніями , онъ , по примѣру всѣхъ почти Греческихъ ученыхъ мужей , путешествовалъ въ Египетъ , бывшій тогда хранилищемъ наукъ и успѣховъ разума человѣческаго. Неизвѣстно какія Архимедъ приобрѣлъ тамъ свѣдѣнія : по крайней мѣрѣ съ своей стороны онъ оставилъ Египтянамъ памятникъ своего посѣщенія , извѣстный шурупъ , коимъ они послѣ того нерѣдко пользовались для напоенія полей , при разлишьяхъ Нила не покрывавшихся водою. Посѣдивъ нѣкошо-

рыя другія страны, Архимедъ возвратился въ отечество, гдѣ вскорѣ прославился творческимъ своимъ умомъ, глубочайшими познаніями и пламенною любовію къ наукамъ. Сія любовь въ послѣдствіи превратилась въ совершенную снрасъ: онъ забывалъ пищу и пище, о копорыхъ приближенные должны были часпо напоминать; и даже, когда бывалъ по убѣжденію ихъ въ банѣ или купальнѣ, дѣлалъ фигуры на золѣ либо на своемъ шѣлѣ, умащенномъ по тогдашнему обыкновенію благовоніями. Подобныя обстоятельство были Архимеду поводомъ къ разрѣшенію вопроса, копорый есть основаніе Гидростатики. Іеронъ Царь Сиракузскій, приказалъ сдѣлать для себя корону изъ чистаго золота: но художникъ, какъ казалось или можетъ быть донесли Государю, утаивъ часть золота, положилъ на мѣсто оной серебро;

почему Иеронъ и просилъ Архимеда (который ему былъ другъ и родственникъ), не можно ли открыть обмана. Архимедъ будучи въ ваннѣ разсуждалъ, что какъ его шло погружаясь въ воду дѣлается легче, такъ должны дѣлаться легче и всѣ вещи; а отсюда заключилъ, что изъ потеряннаго въ водѣ золота опредѣленнаго количества золота, серебра и вещи изъ смѣшенія ихъ сдѣланной, можно посредствомъ пропорцій вычислить количество сихъ металловъ въ таковой вещи. Основываясь на семъ онъ нашелъ, что въ золотой коронѣ дѣйствительно было примѣшано серебро, и при томъ какое именно количество; а признаніе художника подтвердило его вычисленіе.

Здѣсь да позволяю мнѣ замѣтить, что мнѣніе, якобы важнѣйшія открытія сдѣланы случайно, принимаемое въ неограниченномъ смыслѣ есть не-

справедливо. Всегда было извѣстно, что тѣла погружаемыя въ жидкость дѣлаются легче; но токмо Архимедъ постигнулъ, какое слѣдствіе изъ сего вывести можно: всегда было извѣстно, что тѣла падаютъ на землю; но токмо Невтонъ могъ изъ паденія яблока открыть важнѣйшій законъ природы.

Объемля умомъ своимъ всѣ главныя отрасли Математическихъ наукъ, Архимедъ особенно занимался Геометріею и Механикою, и сдѣлалъ въ нихъ такія открытія, которыя дали ему рѣшительное преимущество предъ всѣми учеными мужами древности, приобрѣли ему славу мудрости не человеческой, какъ говоритъ Плутархъ (1), но вдохновенной, и заставили современниковъ думать, что разумъ его почерпалъ истинны изъ исто-

(1) Въ жизнеописаніи Марцелла.

чника сверхъестественнаго (1). Изъ всѣхъ сихъ истинъ самому Архимеду наиболѣе нравилась теорема объ отношеніи шара къ цилиндру описанному (2); онъ былъ столько доволенъ ея изобрѣшеніемъ, что просилъ друзей и родственниковъ своихъ, дабы они, посмерти его, на его гробѣ изобразили сіи фигуры съ означеніемъ ихъ отношенія.

Механика была до Архимеда не что иное какъ сборъ малаго числа правилъ и замѣчаній, неимѣвшихъ ни связи ни доказательствъ; онъ, такъ сказать, сошворилъ ее: открылъ ея главныя основанія и далъ ей видъ науки. Между прочимъ онъ нашелъ и доказалъ, что всякою данною силою возможно приве-

(1) Говорили, будтобы онъ былъ вдохновенъ Сиреною, которая вмѣстѣ съ нимъ обитала. Плутархъ тамъ же.

(2) О шарѣ и цилиндрѣ Книг. 1. предл. 37.

спи въ движеніе всякую данную массу. Точность сего доказательства, какъ повѣшавуюшъ подала ему такую смѣлость, что увѣдомляя о семъ Царя Іерона, присовокупилъ: когдабы я имѣлъ другую землю и могъ на оную перейти, то бы нашу сдвинулъ съ мѣста. Удивленный Царь предложилъ ему доказать сіе правило какимъ либо возможнымъ опытомъ, то есть малою силою привести въ движеніе какое нибудь большое тѣло. Архимедъ взялъ для сего царскую галеру, кошорая съ большимъ трудомъ и помощію многихъ рукъ выпущена была на берегъ, помѣстивъ на нее, кромѣ обыкновеннаго грузу, великое число людей, и одинъ безъ малѣйшаго сопрошивленія, двигая шолько рукою конецъ нѣкошорой многосложной машины, припахилъ къ себѣ судно, будучи въ весьма значительномъ разстояніи, причемъ оно шло шакъ лег-

ко, какъ бы плыло по морю. Царь, понявъ кою велика сила искусства и разума Архимеда, просилъ его устроитъ военныя махины, посредствомъ коихъ можно бы дѣйствовать какъ наступательно, такъ и оборонительно. Геометръ все сие исполнилъ: но по щасшю, или лучше сказать, по крошккому и мудрому правленію Іерона, махины оставались безъ употребленія во все время его царствованія, не смотря на бывшее тогда соперничество между двумя величайшими народами, Римлянами и Карфагенянами, ибо Государь Сиракузскій умѣлъ заставить и тѣхъ и другихъ уважать себя.

По смерти Іерона, вступилъ на Сиракузскій престолъ внукъ его Іеронимъ, который забывъ примѣръ своего дѣда, началъ царствованіе свое, по выраженію Грековъ, какъ ширанъ. Сиракузяне по прошествіи нѣсколь-

кихъ мѣсяцовъ взбуншовались, и Іеронимъ былъ свергнутъ съ престола. Въ сіе время борьба между Римлянами и Картегенянами принимала видъ весьма важный, какъ для нихъ самихъ, такъ и для сосѣдственныхъ народовъ: посему Иппократъ, военачальникъ Сиракузскій, будучи родомъ Картегенецъ, принялъ явно сторону своихъ соотечественниковъ; а Римскій Сенатъ за сіе объявилъ Сиракузянамъ войну.

Вскорѣ послѣ того прибылъ въ Сицилію Консулъ Марцеллъ, и осадилъ Саракузы съ сухаго пуши и съ моря. Мы не будемъ здѣсь входить въ подробности сей осады, одной впрочемъ изъ славнѣйшихъ въ бытописаніяхъ народовъ, какъ предмѣта сюда непосредственно не относящагося. Скажемъ только, что въ продолженіи восьми мѣсяцовъ щещно мужественные Римляне истощили всѣ военныя хитро-

спи и испытывали всѣ роды нападеній, кромѣ присупа; Архимедъ посредствомъ своихъ махинъ, всѣ ихъ предпріятія обращалъ въ ничто: встрѣчалъ ихъ въ необыкновенномъ разстояніи бревнами, шучами стрѣлъ и копій, тысячами камней и свинцовыхъ массъ, вѣсившихъ иногда до десяти шаланшовъ (і); опрокидывалъ, выбрасывалъ на берегъ или разбивалъ о камни, подъ стѣнами города находившіяся, суда ихъ; низпровергалъ или рузрушалъ осадныя ихъ махины: и каждый разъ заставлялъ ихъ искать спасенія въ отступленіи или въ бѣгствѣ. Наконецъ, неслыханнымъ дополѣ, да и нынѣ мало постигаемымъ способомъ, именно зеркалами, зажегъ оставшійся отъ прежнихъ пораженій ихъ флотъ

(і) Греческій островскій (Insulanum) шалантъ имѣлъ слишкомъ 3 пуда нашего вѣсу.

и превращилъ оный въ пепель (1) Римляне пришли въ величайшее смятеніе; казалось, говоритъ Плутархъ, что они сражались съ богами: ихъ воины шептались отъ одного имени Архимеда, и были столько напуганы, что отъ показавшагося на стѣнѣ полѣна или куска веревки, предавались бѣгству. Въ столь трудныхъ обстоятельствахъ благоразумный Консулъ, не смѣя покуситься на послѣднее оставшееся средство, то есть на приступъ, собралъ совѣтъ Трибуновъ, и сходно съ положеніемъ онаго, рѣшился содержать городъ только въ облежаніи. Таково было дѣйствіе ума одного старика, безъ котораго Сиракузы пали бы при первомъ нападе-

(1) Сомнѣвающіеся въ дѣйствительности сего происшествія, могутъ найти доказательства возможности и событію онаго, въ *Histoire des Mathématiques*, par I. F. Montucla Tome I, page 232 — 235.

нѣи республиканцовъ , бывшихъ слишкомъ доспашочно для сего вооруженными.

Геній Архимеда , разспроспранивъ ужась въ Римскомъ войскѣ , произвелъ въ шоже время въ осажденныхъ его соопечесшвенникахъ шакую безпечность , кошорая неминуемо должна была погубить ихъ. Когда наступилъ праздникъ Аршемиды (Діаны), кошорый у Сиракузянъ былъ днемъ увеселеній , шо они всѣ , не исключая и охранной спражи , безъзабошно предались забавамъ , и въ помышленіи не имѣя , что празднуютъ послѣдній день независимости , а многіе и послѣдній день жизни. Римляне узнали сѣе , приближились къ спѣнамъ , опъ кошорыхъ доселѣ были въ почтительномъ разстояніи , проломили вороша , и вошли въ городъ съ неисповсшвомъ раздраженныхъ побѣдишелей. Еще до всшупленія , Марцелль по всей арміи

приказаль, щадишь Архимеда и не дѣлашь ему ни малѣйшаго оскорбленія; но судьба опредѣлила иначе. Онъ былъ убишь (за 212 л. до Р. Х.) солдашомъ, нашедшимъ его углубленного надъ какими то фигурами, и не знавшимъ, что это Архимедъ. Такъ кончилъ жизнь сей чрезвычайный человѣкъ, предъ которымъ и до нынѣ ни одинъ изъ Геометровъ не имѣлъ преимущества, и котораго даже самъ Невтонъ называлъ Владыкою (Principes) Математиковъ.

Беликодушный Марцелль весьма огорчился смертію своего противника. Опыскавъ родственниковъ его, онъ оказалъ имъ отличное уваженіе, и принялъ ихъ подъ особенное свое покровительство; шѣло Архимеда приказаль погребши великолѣпно, и на памятникъ вырѣзашъ шаръ и описанный цилиндръ съ означеніемъ ихъ отношенія.

Спусти 137 лѣтъ, Цицеронъ, бу-

дучи Квесперомъ въ Сицилїи , ошы-
скаль сей памятникъ , который къ
удивленію его , Сиракузяне въ продол-
женїи сшоль малаго времени почти
забыли , и даже полагали , что оный
болѣе не существовалъ (1).

Творенїя Архимеда всѣ почти со-
хранены и дошли до насъ. Онѣя суть:
о Шарѣ и Цилиндрѣ ; Измѣреніе кру-
га ; о Коноидахъ и Сфероидахъ ; Объ
Улиткахъ или завиткахъ ; о Равнобѣ-
сїи плоскостей ; о Квадратурѣ пара-
болы ; Аренарій ; о Тѣлахъ погружен-
ныхъ въ жидкость , и наконецъ , Леммы.
Послѣднїя два найдены до нынѣ токмо
въ переводахъ на Арабскомъ языкѣ ;
всѣ же прочїя сохранены и изданы въ
подлинникѣ , писанныя чистымъ и при-

(1) Нѣкошорые изъ новѣйшихъ путешественни-
ковъ увѣряють , что , основываясь на изустныхъ
преданїяхъ , еще и нынѣ въ Сиракузахъ показыва-
ють то мѣсто , гдѣ стоялъ домъ Архимеда , и ту
башню , изъ которой онъ зажегъ Римскій флотъ.

яшнымъ слогомъ на Дорическомъ нарѣчїи (1). Большую часть оныхъ Архимедъ сообщалъ на разсмотрѣніе и какъ бы посвящалъ друзьямъ своимъ: Кконуну, коего смерть оплакивалъ съ чувствомъ искреннѣйшаго участія, а потомъ Досигею. Что же касается до машинъ, то почти всѣ онѣ для насъ потеряны, ибо Архимедъ изобрѣвъ оныя или для Геометрической забавы или по просьбѣ, и потому не полагая въ нихъ ни важности ни славы, къ сожалѣнію, не считалъ стоящими описанія. Изъ сего правила исключилъ онъ только шаръ, представляющій движеніе небесныхъ тѣлъ, но описаніе онаго не дошло до насъ. Сію машину почитали въ древности за нѣчто чудесное, превышающее всякое удивле-

(1) Въ книгахъ о Шарѣ и Цилиндрѣ и въ Измѣреніи круга встрѣчающіяся не рѣдко выраженія Апполоническія. Торелли безъ основанія полагаетъ, что оныя введены переписчиками.

нїе. Многіе Спихотворцы воспѣвали оную ; въ числѣ ихъ замѣчашелень извѣстный Клавдіанъ, который начинаешъ сими спихами :

*Iupiter, in parvo cùm cerneret æthera vitro,
Risit, et ad superos talia verba dedit:
Hucine mortalis pogrressa potentia curæ;
Ecce Syracusii ludimur arte senis.*

Цицеронъ также съ удивленіемъ упоминаешъ о семъ изобрѣшеніи, и говоришъ, что оно изъ числа шаковыхъ, кои наиболѣе дѣлають честь разуму человѣческому. Но все сіе не можешъ замѣнишъ потері самага описанія.

Издаваемая шеперь въ первый разъ на Россійскомъ языкѣ (1) часть шво-

(1) Книга: *Архимедовы теоремы*, Андреемъ Таккетомъ выбранныя, и Георгіемъ Петромъ Домкіно, сокращенныя, съ Латінскаго на Россійскій языкъ Хірургусомъ Іваномъ Сатаровымъ преложенныя 1745 лѣта, не можешъ называшься переводомъ Измѣренія круга и Книгъ о шарѣ и цилиндрѣ; какъ опшчасш видно и изъ самага ея заглавія.

реній Архимеда переведена мною (1) въ дополненіе къ восьми книгамъ Эвклидовыхъ Началь (2), дабы такимъ образомъ составишь курсъ Геометріи, изложенной по способу древнихъ. Говоря въ шочности, таковымъ дополненіемъ должно счесть шокмо первую книгу о Шарѣ и Цилиндрѣ: но по связи и сходству предмѣшовъ я не могъ оспальнаго ошдѣлать; шѣмъ на-че, что при обоихъ переводахъ главною цѣлїю было, познакомить нашихъ Маѣематиковъ съ древними Геометрами, кои, не смотря на то что кругъ Маѣематическихъ наукъ сдѣлался нынѣ обширнѣе, все еще остающіеся нашими образцами, какъ по выбору предмѣшовъ, такъ и по ясному и шочному изложенію оныхъ.

(1) Изъ изданія Торелли подъ заглавіемъ: *Archimedis quæ supersunt omnia*. Охонїе. 1792.

(2) Эвклидовыхъ Началь восемь книгъ, содержащія въ себѣ основанія Геометріи. 1819.

Впрочемъ , въ швореніяхъ Архимеда встрѣчающся мѣста и промежутки, требующія нѣкоторыхъ поясненій и пополненій. Его необыкновенный разумъ нерѣдко видишь связь истиннѣшамъ, гдѣ она для обыкновенныхъ людей невидима, особливо съ перваго взгляду ; иногда выводилъ слѣдствія изъ такихъ предложеній, которыя не всякому знать или помнить можно : но говоря вообще, онъ легокъ, ибо всегда почтенъ, покрайней мѣрѣ гораздо легче, нежели объ немъ думаютъ ; и если встрѣчающся какія либо трудности, то оныя или сопряжены съ свойствомъ предметовъ, или происходятъ отъ малаго нашего знанія древней теоріи величинъ пропорціональных. Какъ бы то нибыло, но по выше сказаннымъ причинамъ, нѣкоторыя мѣста слѣдовало пополнить и пояснить, что мною и учинено въ помѣщенныхъ на концѣ сей

книги примѣчанійхъ, кои заимствованы болшею частію изъ древняго нѣкоторыхъ Архимедовыхъ твореній толкователя Эвпокія.

Что касается до самаго перевода, то я держался того же правила, что при изданіи Эвклида, то есть предпочиталъ всегда точное и самое близкое сходство съ подлинникомъ, красота слога и внѣшней изящности выраженій. Можешь быть инымъ покажешься, что полезно было бы ввести сокращительные знаки, а особливо пропорцій: но я, принявъ однажды за правило не опуступать отъ подлинника, не хотѣлъ здѣлать таковой перемѣны, и при томъ думаю, что въ простомъ изложеніи истиннѣ, какъ въ Геометріи, гдѣ все состоишь въ однихъ разсужденіяхъ а не въ изчисленіяхъ, безъ шаковыхъ знаковъ всегда обходишься можно и даже полезно.



АРХИМЕДА

О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ.

К Н И Г А I.

Архимедъ Досигея привѣтствуетъ! Не задолго предъ симъ я препроводилъ къ тебѣ нѣкоторыя предмѣты моихъ изслѣдываній вмѣстѣ съ найденными мною доказательствами, въ томъ числѣ и слѣдующую теорему: Всякій отрѣзокъ, содержимый въ прямой и въ сѣченіи прямоугольнаго конуса (1), равенъ чепыремъ прешамъ треугольника, имѣющаго съ отрѣзкомъ тоже основаніе и ту же высоту.

Нынѣ я кончилъ и другія нѣкоторыя мнѣ на мысль пришедшія теоремы, изъ коихъ достопримѣчательнѣйшія суть сіи: Поверхность шара есть чепырекрапная наибольшаго его круга. — Поверхность шароваго (сферическаго) отрѣзка равна

кругу, коего радиусъ (2) равенъ прямой, проведенной отъ вершины до окружности основанія отсѣзка (3). — Цилиндръ, имѣющій основаніе наибольшій кругъ шара, а высоту равную поперечнику онаго, есть полупорный (4) шара: И его поверхность есть полупорная же поверхность шара. Свойства сіи безъсомнѣнія существовали въ сказанныхъ фигурахъ, но доселѣ не были еще замѣчены ни кѣмъ изъ занимавшихся Геометріею: въ справедливости же оныхъ легко убѣдишься всякому, кто со вниманіемъ сличитъ теоремы съ предложенными мною на оныя доказательствами (5). Такимъ образомъ и Эвдоксій собственнымъ разсужденіемъ открылъ многое о тѣлахъ, на примѣръ: что всякая пирамида есть претъ призмы, имѣющей съ пирамидою поже основаніе и поже высоту; что всякій конусъ есть претъ цилиндра, имѣющаго съ конусомъ поже основаніе и поже высоту: свойства, всегда существовавшія въ сихъ фигурахъ, но копорыя, несмотря на то, что до Эвдоксія были многіе Геометры не недостойные вниманія, оставались для всѣхъ не извѣстными, и ни кѣмъ не были замѣчены.

Впрочемъ, оставляя все сіе на уваженіе людей, могущихъ судить о таковыхъ вещахъ, я съ моей стороны желалъ бы выдать въ свѣтъ сіе сочиненіе, при жизни еще Конона, который весьма могъ вникнуть въ оное, и назначить всему насоящую цѣну. Какъ бы то ни было, полагая что и другимъ занимающимся Магематическими науками не бесполезно будетъ знать мои теоремы, я посылаю оныя къ тебѣ съ надлежащими доказательствами, дабы знающіе сей предметъ, рассмотрѣли оныя. Прощай.

Здѣсь первѣе излагаются опредѣленія (6) и положенія, нужныя для доказательства теоремъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ (6).

1. Кривыя линіи (7), оканчивающіяся на плоскости, суть тѣ, которыя вразсужденіи прямыхъ, концы ихъ соединяющихъ, суть или совсѣмъ по ту же сторону, или нисколько по другую не падаютъ (8).

2. Изъ сего рода линій, вогнутою съ той же стороны называю ту, на которой чрезъ взятыя какія нисетъ двѣ

почки пропятиваемые прямыя падають или всѣ по одну сторону, или покло нѣкоторыя, а другія по самой кривой, но ни копорая по другую не падають (9).

3. Подобнымъ образомъ, поверхносни оканчивающіяся на плоскостни сунъ тѣ, копорыя, будучи не на плоскостни, имѣють края свои на ней, и вразсужденіи сей плоскостни или находящиясь совсѣмъ по одну ея сторону, или нисколько по другую не падають.

4. Изъ сего рода поверхностей, вогнутыми называю тѣ, на коихъ чрезъ взятыя какія нистъ двѣ почки пропятиваемые прямыя падають или всѣ по одну сторону, или покло нѣкоторыя, а другія по самимъ поверхностямъ, но ни копорая по другую не падаетъ (10).

5. Вырѣзкомъ тѣлеснымъ называю фигуру, содержимую въ поверхносни конуса, когда онъ пересѣкаетъ шаръ имѣя вершину при центрѣ онаго, и въ поверхносни шара отнимаемой конусомъ (11).

6. А тѣлеснымъ ромбомъ называю тѣло, составленное изъ двухъ конусовъ, имѣющихъ тоже основаніе, а вершины съ различныхъ сторонъ плоскостни основанія, такъ что ихъ оси лежатъ впрямъ (12).

Я принимаю слѣдующія

ПОЛОЖЕНІЯ или НАЧАЛА (13):

1. Изъ линій, тѣже концы имѣющихъ, прямая есть наименьшая (14).

2. Изъ другихъ же линій, находящіяся на одной плоскости и имѣющія тѣже концы, суть неравныя, которыя вогнуты съ той же стороны; и когда одна изъ нихъ, или вся объемлется другою и прямою тѣже съ нею концы имѣющею, или токмо объемлется нѣкоторою частію, имѣя остальную часть общую: то объемлемая есть меньшая.

3. Подобно, изъ поверхностей тѣже края имѣющихъ, еслили края находящіяся на плоскости, меньшая есть плоскость.

4. Изъ другихъ же поверхностей, имѣющихъ тѣже края и на одной плоскости, суть неравныя, которыя вогнуты съ той же стороны; и когда одна изъ нихъ, или вся объемлется другою и плоскостію тѣже съ нею края имѣющею, или токмо объемлется нѣкоторою частію, имѣя остальную часть общую: то объемлемая есть меньшая.

5. Изъ неравныхъ линій, неравныхъ по-

верхностей, или неравныхъ тѣлъ, еспь-
ли избытокъ большаго предъ меньшимъ,
будеть совокупаемъ самъ съ собою, но
онъ можетъ превзойти всякую предло-
женную величину изъ рода тѣлъ, кои взаи-
мно сравниваются (15).

Предположивъ все сіе, поступимъ далѣе.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Ежели въ кругѣ вписанъ многоугольникъ;
то явно, что очертаніе вписаннаго мно-
гоугольника меньше окружности круга.

Ибо каждая сторона многоугольника мень-

† пол. 1. ше описываемой ею дуги круга†.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели около круга описанъ многоуголь-
никъ; то очертаніе многоугольника опи-
саннаго больше окружности круга.

Пусть будетъ описанъ около круга
многоугольникъ, какъ предполагается. Го-
ворю, что очертаніе многоугольника боль-
ше окружности круга.

Поселику прямая BA, AL (16) больше
† пол. 2. дуги BL†, ибо имѣя тѣже концы объем-
лютъ дугу; подобно и прямая DC, CB
больше дуги DB; и LK, KN больше LN,
и FG, GN больше FN, и наконецъ DE,

ЕF больше DF: посему и цѣлое очертаніе многоугольника больше окружности круга.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

По даннымъ двумъ неравнымъ величинамъ, возможно найши двѣ прямыя неравныя такія, чѣобы большая прямая къ меньшей имѣла меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей.

Пусть будутъ двѣ неравныя величины АВ, D, и пусть АВ будетъ большая. Говорю, что возможно найши двѣ неравныя прямыя, удовлетворяющія сказанному условію.

Положи величину ВС равную D^* , и изложивъ какую ни есть прямую FG. Итакъ величина AC, взятая кратно, превзойдетъ величину D^+ . Возьми такую кратную, и пусть она будетъ АН; и сколько кратная есть АН величины AC, пусть будетъ столько кратная прямая FG прямой GE. Посему какъ НА къ AC, такъ FG къ GE^* ; и предложениемъ, какъ EG къ $с, г.$ GF, такъ AC къ АН. И поелику АН больше D, то есть величины СВ, то СА къ АН имѣетъ меньшее отношеніе, не-

8, 1. жели CA къ CB^ (17). Посему, совокупле-
 11, 1. ніемъ, EF къ FG имѣеть меньшее отно-
 шеніе, нежели AB къ BC . Но BC равна
 D : посему EF къ FG имѣеть меньшее

3 и 11, 1. отношеніе, нежели AB къ D^ .

И пакъ найдены двѣ неравныя прямыя,
 удовлетворяющія сказанному условію, по-
 есть такія, что большая къ меньшей
 имѣеть меньшее отношеніе, нежели дан-
 ныя величины, большая къ меньшей.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

По даннымъ двумъ неравнымъ величи-
 намъ и кругу, возможно въ кругѣ впи-
 сать многоугольникъ, и около него опи-
 сать другой, такіе, чтобы сторона мно-
 гоугольника описаннаго къ сторонѣ впи-
 саннаго имѣла меньшее отношеніе, неже-
 ли большая величина къ меньшей.

Пусть будутъ даны величины A , B , и
 кругъ $CDEF$. Говорю, что возможно удо-
 влетворить условію.

Сыщи двѣ прямыя HK , изъ коихъ H
 большая, такія, чтобы H къ KL имѣла
 меньшее отношеніе, нежели большая вели-

3. чина къ меньшей; и отъ L проводи, подъ

11, 1. прямыми углами къ LK , прямую LM^ ; и

опъ К помѣсти прямую KM равную H ,
 ибо сіе возможно (18); и проводи два взаи-
 мно перпендикулярные поперечники CE ,
 DF . Теперь естли уголъ DGE раздѣлимъ
 по поламъ, и каждую половину еще по
 поламъ, и сіе всегда дѣлать будемъ; по
 напоследокъ останеся иѣкій уголъ мен-
 шій, нежели двукрапный уголъ LKM .^{*1, х.}
 Пусть останеся, и пусть будетъ тако-
 вый уголъ NGC , и пропхни NC . Ипакъ
 NC естъ спорона многоугольника равно-
 сторонняго. Ибо какъ уголъ NGC измѣ-
 ряетъ прямой уголъ DGC , то и дуга NC
 измѣряетъ дугу CD , четверть окружно-
 сти, слѣдственно измѣряетъ и цѣлую
 окружность; а посеу явно, что прямая
 CN естъ спорона многоугольника равно-
 стороннаго. Раздѣли уголъ NGC по по-
 ламъ прямою GO ^{*9. 1.}; и проводи касатель-
 ную къ кругу въ O прямую POQ ; и про-
 должи прямая GNQ , GCP . Слѣдственно
 QP естъ спорона же многоугольника опи-
 саннаго около круга, равностороннаго и,
 какъ явствуетъ, подобнаго вписанному,
 коего спорона естъ NC . И поелику уголъ
 NGC естъ меньше, нежели двукрапный
 уголъ LKM , то уголъ TGC меньше угла
 LKM ; углы же при L , T суть прямые:

посему $МК$ къ $ЛК$ имѣеть большее отноше-
 ніе, нежели $СГ$ къ $ГТ$ (19). Но $СГ$ рав-
 16, r. на $ГО$: слѣдственно $ГО$ къ $ГТ$, по есть
 QR къ $НС$ имѣеть меньшее отноше-
 ніе, нежели $МК$ къ $КЛ$. Припомъ же $КМ$ къ
 $КЛ$ имѣеть меньшее отноше-
 ніе, нежели $А$ къ $В$, (20) и QR есть сторона много-
 угольника описаннаго, а $СН$ сторона впи-
 саннаго (21). Что и найши предложено
 было.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели опять будутъ двѣ неравныя ве-
 личины, и вырѣзокъ круга, по возможно
 описать многоугольникъ около сего вы-
 рѣзка, и въ немъ вписать другой, такіе,
 чшобы сторона описаннаго къ сторонѣ
 вписаннаго имѣла меньшее отноше-
 ніе, нежели большая величина къ меньшей.

Пусть опять будутъ двѣ неравныя ве-
 личины $Е$, $Г$, изъ коихъ $Е$ большая, и
 еще нѣкій кругъ ABC , имѣющій центръ
 въ D ; и пусть при D будетъ составленъ
 вырѣзокъ ADB . Надлежитъ описать мно-
 гоугольникъ около вырѣзка ABD , и въ немъ
 вписать другой, имѣющіе всѣ стороны,
 кромѣ BD , DA , взаимно равныя, такъ
 чшобы условіе было выполнено.

Сыщи двѣ прямыя G , HK неравныя, изъ коихъ ~~HK~~ большая, такія, чѣобы G къ HK имѣла меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей, что возможно[†]; и изъ точки K проведя, какъ и^{†3}. прежде, подѣ прямыми углами къ HK прямую KL , помѣспи HL равную G , что такожь возможно, ибо G больше HK . Теперь, еспѣли раздѣлимъ уголь ADB по поламъ, его половину еще по поламъ, и такъ далѣе, то на послѣдокъ останешся нѣкій уголь меньшій, нежели двукратный уголь LHK . Пусть останешся таковой уголь ADM : посему AM ~~будетъ~~ сторона многоугольника вписаннаго въ вырѣзкѣ. И еспѣли уголь ADM раздѣлимъ по поламъ прямою DN , и чрезъ N проведемъ касательную къ вырѣзку прямую ONP ; то она будетъ сторона многоугольника, около сего вырѣзка описаннаго, подобнаго упомянутому многоугольнику: а, въ силу сказаннаго предъ симъ, OP къ AM будетъ имѣть меньшее отношеніе, нежели величина E къ величинѣ F .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

По данному кругу и двумъ неравнымъ величинамъ, описать многоугольникъ око-

ло сего круга и въ немъ вписать другой, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей.

Изложи кругъ А и двѣ неравныя величины Е, F, изъ коихъ Е большая. Надлежитъ описать многоугольникъ около сего круга и въ немъ вписать другой, такіе, чтобы удовлетворяли условію.

Беру двѣ прямыя С, D, изъ коихъ С большая, такія, чтобы С къ D имѣла +3. меньшее отношеніе, нежели Е къ F⁺, и прямымъ С, D среднюю пропорціональную G: посему Е больше G. И пусть будетъ описанъ многоугольникъ около круга и въ немъ вписанъ другой, по сказан- +4. ному предъ симъ⁺, такіе, чтобы сторона многоугольника описаннаго къ сторонамъ вписаннаго имѣла меньшее отношеніе, нежели С къ G: посему и удвоенное отно- *см. q, v. шеніе будетъ меньше удвоеннаго*. Но удвоенное отношеніе стороны къ стороне есть отношеніе многоугольника къ многоугольнику; ибо они подобны; а удвоенное прямыя С къ G есть отношеніе С къ D: посему и многоугольникъ описанный къ вписанному имѣетъ меньшее отношеніе, нежели **В** къ D; а посему описан-

ный къ вписанному шѣмъ паче имѣеть меньшее отношеніе, нежели Е къ Г.

Подобно же докажемъ, что по даннымъ двумъ неравнымъ величинамъ и вырѣзку круга, возможно вписать многоугольникъ около вырѣзка и въ немъ вписать другой, подобный первому, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей.

Явствуемъ еще, что ежели даны кругъ или вырѣзокъ и нѣкое пространство, то возможно, вписывая въ сему кругъ или въ сему вырѣзку, а потомъ въ оставшихся опрѣзкахъ, многоугольники равно-сторонные, получить напоследокъ такіе оспаяющіеся опрѣзки круга или вырѣзка, кои будутъ меньше даннаго пространства, какъ показано уже въ Началахъ*. *глъ 2, XII.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Мы же докажемъ, что по данному кругу или вырѣзку, и пространству, возможно описать около сего круга или вырѣзка многоугольникъ такой, чтобы оспаяющіеся его опрѣзки были меньше даннаго пространства. Мыѣ дозволено будетъ то,

что докажу о кругѣ, опрѣссти, по сходству причинъ, и къ вырѣзку.

Пусть будутъ даны кругъ А и нѣкое пространство В. Около сего круга возможно описать многоугольникъ такой, что оставшіеся его опрѣзки, кои между кругомъ и многоугольникомъ, будутъ меньше поверхности В.

Поелику суть двѣ неравныя величины; большая, пространство В купно съ кругомъ А, а меньшая сей кругъ; то опиши многоугольникъ около круга А и въ немъ впиши другой, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели большая изъ сказанныхъ величинъ къ меньшей. Сей описанный многоугольникъ будетъ пошъ самый, коста опрѣзки, облегающіе кругъ, суть меньше даннаго пространства В.

И дѣйствительно, поелику описанный къ вписанному имѣетъ меньшее отношеніе, нежели пространство В купно съ кругомъ къ тому же кругу; и кругъ больше многоугольника вписаннаго (22): то тѣмъ паче описанный къ кругу А имѣетъ меньшее отношеніе, нежели пространство В купно съ кругомъ А къ сему же кругу. Посему, отдѣленіемъ, остальные опрѣзки

многоугольника описаннаго къ кругу А имѣють меньшее отношеніе, нежели пространство В къ кругу А*. Чего ради *а, в. отрѣзки многоугольника описаннаго суть меньше пространства В*.

Или и такъ. Поелику описанный къ кругу имѣетъ меньшее отношеніе, нежели пространство В купно съ кругомъ А къ сему же кругу; то многоугольникъ описанный меньше пространства В купно съ кругомъ А: посему остальные отрѣзки, облегающіе кругъ, суть меньше пространства В.

Подобно же докажется и о вырѣзкахъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели въ прямомъ конусѣ впишется пирамида, имѣющая основаніе равносторонное; то поверхность ея, кромѣ основанія, равна преутольпику, имѣющему основаніе равное очертанію основанія пирамиды, а высоту равную перпендикуляру, опъ вершины къ одной изъ сторонъ основанія проведенному.

Пусть будетъ прямой конусъ, коего основаніе кругъ АВС; и пусть будетъ въ немъ вписана пирамида, имѣющая

основаніемъ равносторонный треугольникъ ABC . Говорю, что поверхность ея, кромѣ основанія, равна сказанному треугольнику.

Поелику конусъ есть прямой, и основаніе пирамиды равносторонное; то высоты треугольниковъ, содержащихъ пирамиду, суть взаимно равныя*. Сіи же треугольники стоятъ на равныхъ основаніяхъ AB , BC , CA , и имѣютъ помянутую высоту: слѣдственно сіи всѣ треугольники равны треугольнику, имѣющему основаніе равное прямымъ AB , BC , CA , и помянутую высоту, то есть, ему равна поверхность пирамиды, кромѣ треугольника ABC .

ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕЩЕ ЛЕГЧЕ.

Пусть будетъ прямой конусъ, коего основаніе кругъ ABC , а вершина точка D ; и пусть будетъ вписана въ сень конусъ пирамида, имѣющая основаніемъ равносторонный треугольникъ ABC ; и протіяни DA , DC , DB . Говорю, что треугольники ADB , ADC , BDC равны треугольнику, коего основаніе равно очерпанію треугольника ABC , а перпендикуляръ, отъ вершины къ основанію проведенный,

равенъ перпендикуляру, проведенному отъ D къ BC.

Проведи перпендикуляры DK, DL, DM, то оныя будутъ взаимно равны; и изложи треугольникъ EFG, имѣющій основаніе равное очертанію треугольника ABC, а высоту GH равную DL. Поелику прямоугольникъ въ BC, DK есть двукрашный треугольника DBC, а въ AB, DL двукрашный треугольника ABD, и въ AC, DM двукрашный треугольника ADC: то прямоугольникъ содержимый въ очертаніи треугольника ABC, то есть въ EF, и въ прямой DL, то есть GH, есть двукрашный всѣхъ треугольниковъ ADB, BDC, ADC. Но прямоугольникъ въ EF, GH есть двукрашный и треугольника EFG: посему треугольникъ EFG равенъ треугольникамъ ADB, BDC, ADC.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Ежели около прямого конуса опишется пирамида; то поверхность сей пирамиды, кромѣ основанія, равна треугольнику, имѣющему основаніе равное очертанію ея основанія, а высоту равную сторонѣ конуса.

Пусть будетъ конусъ, коего основаніе кругъ ABC ; и пусть описана будетъ около сего конуса пирамида, такъ чпобы ея основаніе, то есть многоугольникъ DEF былъ описанный около круга ABC . Говорю, чпо поверхность пирамиды, кромѣ основанія, равна помянутому преутольнику.

Поелику ось конуса перпендикулярна къ основанію, то есть къ кругу ABC ; и прямыя проводимыя отъ центра къ прикосновеніямъ перпендикулярны къ касательнымъ: то и проведенныя отъ вершины конуса къ прикосновеніямъ, будутъ перпендикулярны къ DE , FE , FD (23). Ишакъ помянутые перпендикуляры GA , GB , GC взаимно равны, ибо суть стороны конуса. Теперь изложи преутольникъ NKL , имѣющій основаніе NK равное очертанію преутольника DEF , а высоту LM равную GA . И поелику прямоугольникъ въ DE , AG есть двукратный преутольника EDG ; а въ DF , GB двукратный преутольника DFG ; и въ EF , CG двукратный преутольника EGF : то прямоугольникъ въ NK , AG , то есть ML , есть двукратный всѣхъ преутольниковъ EDG , FDG , EGF . Но прямоугольникъ въ NK , ML есть двукратный

и треугольника LKH : следовательно поверхность пирамиды, кромѣ основанія, равна треугольнику, имѣющему основаніе равное очертанію треугольника DEF , а высоту равную сторонѣ конуса.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Естьли въ кругѣ, который есть основаніе прямого конуса, помѣстится прямая линія; и опъ концовъ ея до вершины конуса пропѣянутся прямая линія: то треугольникъ, составившійся изъ прямыхъ, помѣщенной и пропѣянурыхъ до вершины, будетъ меньше поверхности конуса, которая между пропѣянными до вершины.

Пусть будетъ прямого конуса основаніе кругъ ABC , а вершина точка D ; и пусть помѣстится въ немъ нѣкая прямая AC , и опъ вершины до A , C пропѣянутся AD , DC . Говорю, что треугольникъ ADC есть меньше конической поверхности, что между AD , DC .

Раздѣли дугу ABC по поламъ въ B , и пропѣяни AB , CB , DB : то треугольники ABD , BDC будутъ больше треугольника ADC (24). Пусть избытокъ помянутыхъ

треугольниковъ предъ треугольникомъ ADC будетъ пространство H . Ипакъ H или меньше отрѣзковъ AB , BC , или не меньше.

Пусть, во первыхъ, будетъ не меньше. И поелику имѣются двѣ поверхности, одна коническая, что между AD , DB , купно съ отрѣзкомъ AEB , а другая треугольникъ ADB ; и обѣ окраиваются или сопридѣльны на очершаніи треугольника ADB : то объемлющая больше объемлемой. Посему коническая поверхность, что между AD , DB , купно съ отрѣзкомъ AEB , есть больше треугольника ABD . Подобно и поверхность, что между BD , DC , купно съ отрѣзкомъ CFB , больше треугольника BDC (25). Чего ради и цѣлая коническая поверхность, что между AD , DC , купно съ пространствомъ H , есть больше сказанныхъ треугольниковъ. Сказанные же треугольники равны треугольнику ADC съ пространствомъ H : слѣдственно, по опшати общаго пространства H , осталая коническая поверхность, что между AD , DC , будетъ больше треугольника ADC .

Но пусть H будетъ меньше отрѣзковъ AB , BC . Еслии раздѣлимъ дуги AB , BC

но поламъ, а половины ихъ еще по поламъ, «и сіе всегда дѣлать будемъ»; то напо- слѣдокъ останутся опрѣзки круга, кои будутъ меньше пространства Н. Пусть таковыя останутся, и будутъ шѢ, кои на АЕ, ЕВ, ВF, CF; и просяни DE, DF. Опять, по предъидущему, поверхность конуса, которая между AD, DE, купно съ опрѣзкомъ что на АЕ, есть больше треугольника ADE; а которая между ED, DB, купно съ опрѣзкомъ что на ЕВ, больше треугольника EDB. Посему поверхность что между AD, DB, купно съ опрѣзками АЕ, ЕВ, есть больше треугольниковъ ADE, EDB. И поелику треугольники AED, DEB больше треугольника ABD, какъ уже доказано; то шѢмъ паче поверхность конуса, которая между AD, DB, купно съ опрѣзками, что на АЕ, ЕВ, есть больше треугольника ADB. Потому же и поверхность между BD, DC, купно съ опрѣзками на BF, FC, больше треугольника BDC. Чего ради цѣлая поверхность, которая между AD, DC, купно со всѣми сказанными опрѣзками, есть больше треугольниковъ ABD, BDC. Но сіи треугольники равны треугольнику ADC купно съ пространствомъ Н; а всѣ ска-

занные отрѣзки суть меньше пространства H : слѣдственно оспальная поверхность что между AD , DC есть больше треугольника ADC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Ежели къ кругу, который есть основаніе прямого конуса, будутъ проведены касательныя, лежащія на тойже плоскости что и кругъ и взаимно встрѣчающіяся; и еслили отъ точекъ касанія и встрѣчи, пропаянуты будутъ до вершинѣ конуса прямыя: то треугольники, содержаемые въ касательныхъ и въ прямыхъ пропаянутыхъ до вершины конуса, будутъ больше поверхности конуса, ими описываемой.

Пусть будетъ конусъ, коего основаніе кругъ ABC , а вершина точка E ; и пусть будутъ проведены касательныя къ кругу ABC прямыя AD , DC , лежащія на тойже съ нимъ плоскости; и отъ точки E , которая есть вершина конуса, до точекъ A , D , C пусть будутъ пропаянуты EA , ED , EC . Говорю, что треугольники ADE , DEC суть больше конической поверхности, которая между прямыми AE , CE и дугою ABC .

Проведи прямую GBF касательную къ кругу и параллельную къ AC , раздѣливъ дугу ABC по поламъ въ B ; и опъ G , F до E просяни GE , FE . Поелику GD , DF больше GF , придай обще GA , FC ; посему и цѣлыя AD , DC суть больше прямыхъ AG , GF , FC . И поелику AE , EB , EC суть стороны прямого конуса, шо онѣ взаимно равны; онѣ же и перпендикулярны «къ касательнымъ», по доказанному въ леммѣ[†] (23). И пошому прямоугольники ^{† въ 9.} въ перпендикулярахъ и въ основаніяхъ преугольниковъ AED , DEC содержимые, суть больше содержимыхъ въ перпендикулярахъ и въ основаніяхъ преугольниковъ AGE , GEF , FEC : ибо основанія AG , GF , FC ~~больше~~ основаній CD , DA ; вы- 0046соты же суть равныя (26), [поелику, какъ явно, прямая просянушая опъ вершины конуса до прикосновенія основаній, перпендикулярна къ касательной? (27). Пусть избытокъ преугольниковъ AED , DCE предъ преугольниками AGE , GEF , FEC будетъ пространство H . Ишакъ H или меньше опрѣзковъ облегающихъ AGB , BFC , или не меньше.

Пусть, вопервыхъ, будетъ не меньше. Поелику имѣющся двѣ сложные поверх-

ности, одна пирамиды, имѣющей основаніе трапецію $GACF$ а вершину точку E , а другая коническая между AE , EC , купно съ отрѣзкомъ ABC , и обѣ сопредѣльны на очертаніи треугольника AEC : то явствуетъ, что поверхность пирамиды, кромѣ треугольника AEC , больше конической поверхности, купно съ отрѣзкомъ ABC . Опними общій отрѣзокъ ABC : посему остальные треугольники AGE , GEF , FEC , купно съ облегающими отрѣзками AGB , BFC , суть больше конической поверхности что между AE , EC . Но облегающихъ отрѣзковъ AGB , BFC не меньше есть пространство H : посему треугольники AGE , GEF , FEC , купно съ H , суть иѣмъ паче больше конической поверхности, что между AE , EC . А треугольники AGE , GEF , FEC , купно съ H , равны треугольникамъ AED , DEC : чего ради и треугольники AED , DEC суть больше сказанной конической поверхности.

Но пусть H будетъ меньше отрѣзковъ. Еслии будемъ описывать многоугольники около отрѣзковъ, раздѣляя дуги по поламъ, и проводя касательныя: то оставшися напоследокъ нѣкіе отрѣзки, кои

всѣ будутъ меньше пространства H (28). Пусть таковыя оспанутся; и пусть AMK , KNB , BOL , LPC будутъ тѣ опрѣзки, кои меньше пространства H : и пропаянны прямыми до E (29). Опять явно, что треугольники AGE , GEF , FEC больше треугольниковъ AEM , MEN , NEO , OEP , PES : ибо основанія первыхъ больше основаній вторыхъ, а высоты всѣхъ суть одинакия. Равнымъ образомъ, опять поверхность пирамиды, имѣющей основаніемъ многоугольникъ $AMNORC$, а вершину точку E , кромѣ треугольника AEC , есть больше конической поверхности что между AE , EC , купно съ опрѣзкомъ ABC . Опними общій опрѣзокъ ABC : посему остальные треугольники AEM , MEN , NEO , OEP , PES , купно съ облегающими опрѣзками AMK , KNB , BOL , LPC , суть больше конической поверхности что между AE , EC . Но сказанныхъ облегающихъ опрѣзковъ больше есть пространство H ; а такожь и треугольниковъ AEM , MEN , NEO , OEP , PES , по доказанному суть больше треугольниковъ AGE , GEF , FEC : слѣдственно тѣмъ паче треугольники AGE , GEF , FEC , купно съ пространствомъ H , то есть треугольники ADE , DEC суть больше кони-

ческой поверхности, что между прямыми AE , EC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Если на поверхности прямого цилиндра проведены двѣ прямыя линіи: по поверхность цилиндра, которая между сихъ прямыхъ, есть больше параллелограмма, содержаемаго сими прямыми и соединяющими ихъ концы.

Пусть будетъ прямой цилиндръ, коего основаніе кругъ AB , противуположащій кругу CD ; и пусть будутъ проведены AC , BD (30). Говорю, что цилиндрическая поверхность, охватываемая прямыми AC , BD , есть больше параллелограмма $ACDB$.

Раздѣли дуги AB , CD по поламъ въ точкахъ E , F ; и проведи AE , EB , CF , FD . Поскольку AE , EB больше AB ; и параллелограммы на нихъ стоящіе суть равновысошныя: то параллелограммы, коимъ основанія AE , EB , а высота таже что и цилиндра, суть больше параллелограмма $ABCD$. Пусть избытокъ однихъ предъ другими будетъ пространство G . Инакъ пространство G или меньше плоскихъ отпрѣзковъ AE , EB , CF , FD , или не меньше.

Пусть, вопервыхъ, будетъ не меньше. И поелику цилиндрическая поверхность, описываемая прямыми AC , BD , купно съ опрѣзками AEB , CFD , окраевается на плоскости параллелограмма $ABDC$; а и поверхность сложенная изъ параллелограмовъ, коихъ основанія AE , EB а высота таже что и цилиндра, купно съ треугольниками AEB , CFD , окраевается такожь на плоскости параллелограмма $ABDC$; и одна объемлетъ другую; и обѣ выпуклы съ тойже стороны: по цилиндрическая поверхность, прямыми AC , BD описываемая, купно съ плоскими опрѣзками AEB , CFD , есть больше поверхности, сложенной изъ параллелограмовъ, коихъ основанія AE , EB а высота таже что и цилиндра, и изъ треугольниковъ AEB , CFD †. Опними общіе треугольники пол. 4. AEB , CFD : посему осталая цилиндрическая поверхность, описываемая прямыми AC , BD , купно съ плоскими опрѣзками AE , EB , CF , FD , есть больше поверхности, сложенной изъ параллелограммовъ, коихъ основанія AE , EB , а высота таже что и цилиндра. Но параллелограммы, коихъ основанія AE , EB , а высота таже что и цилиндра, равны параллелограмму

ACDB и пространству G (31): чего ради оспальная цилиндрическая поверхность, оспнимаемая прямыми AC, BD, есть больше параллелограмма ACDB.

Но пусть пространство G будетъ меньше плоскихъ опрѣзковъ AE, EB, CF, FD. Если каждую изъ дугъ AE, EB, CF, FD раздѣлимъ по поламъ въ шочкахъ H, K, L, M, и протянемъ AH, HE, EK, KB, CL, LF, FM, MD, то опспимущся треугольники AHE, EKB, CLF, FMD, кои не меньше половины плоскихъ опрѣзковъ AE, EB, CF, FD; и если сие всегда дѣлать будемъ: то останущся напоследокъ нѣкіе опрѣзки, кои будутъ меньше пространства G . Пусть таковыя останущся, и будутъ AH, HE, EK, KB, CL, LF, FM, MD: то подобно докажемъ, что параллелограммы, коихъ основанія AH, HE, EK, KB, а высота таже что и цилиндра, суть больше параллелограмовъ, коихъ основанія AE, EB, а высота таже что и цилиндра. И поелику цилиндрическая поверхность, оспнимаемая прямыми AC, BD, купно съ плоскими опрѣзками AEB, CFD, имѣетъ края на плоскости параллелограмма, равно какъ и поверхность, сложенная изъ параллелограмовъ, коихъ осно-

ванія $АН$, $НЕ$, $ЕК$, $КВ$, а высота также что и цилиндра, и изъ фигуръ $АНЕКВ$, $CLFMD$: то, по описаніи общихъ фигуръ $АНЕКВ$, $CLFMD$, остальная цилиндрическая поверхность, описываемая прямыми $АС$, $ВD$, купно съ плоскими снрѣзками $АН$, $НЕ$, $ЕК$, $КВ$, CL , LF , FM , MD , будетъ больше поверхности, сложенной изъ параллелограммовъ, коихъ основанія $АН$, $НЕ$, $ЕК$, $КВ$, а высота также что и цилиндра. Но параллелограммы, коихъ основанія $АН$, $НЕ$, $ЕК$, $КВ$, а высота также что и цилиндра, больше параллелограммовъ, коихъ основанія $АЕ$, $ЕВ$, а высота также что и цилиндра: посему цилиндрическая поверхность описываемая прямыми $АС$, $ВD$, купно съ плоскими снрѣзками $АН$, $НЕ$, $ЕК$, $КВ$, CL , LF , FM , MD , есть больше параллелограммовъ, коихъ основанія $АЕ$, $ЕВ$, а высота также что и цилиндра. Параллелограммы же, коихъ основанія $АЕ$, $ЕВ$ а высота также что и цилиндра, равны параллелограмму $АСDB$ и пространству G : посему цилиндрическая поверхность, описываемая прямыми $АС$, $ВD$, купно съ плоскими снрѣзками $АН$, $НЕ$, $ЕК$, $КВ$, CL , LF , FM , MD , есть больше параллелограмма $АСDB$ купно съ пространствомъ G .

Но отрѣзки $АН$, $НЕ$, $ЕК$, $КВ$, $СЛ$, $ЛГ$, FM , MD меньше пространства G : чего ради осталая цилиндрическая поверхность, ограничиваемая прямыми AC , BD , есть больше параллелограмма $ACDE$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Если на поверхности какого ни есть прямого цилиндра будутъ двѣ прямыя линіи; и чрезъ концы ихъ проведутся къ кругамъ, кои суть основанія цилиндра, касательныя, лежащія на тойже съ ними плоскости и взаимно встрѣчающіяся: то параллелограммы, содержимыя касательными и сторонами цилиндра, будутъ больше поверхности цилиндра, ограничиваемой прямыми, кои на его поверхности.

Пусть кругъ ABC будетъ основаніе какого ни есть прямого цилиндра; и пусть на поверхности его будутъ двѣ прямыя линіи, коихъ концы A , C ; и чрезъ A , C пусть проведены будутъ касательныя къ кругу ABC , находящіяся на тойже съ нимъ плоскости, кои взаимно встрѣчаются въ G . Вообразимъ и на другомъ основаніи цилиндра, чрезъ концы прямыхъ, кои на его поверхности, проведенныя

прямая касательная къ кругу. Надлежитъ доказать, что параллелограммы, содержащиеся въ касательныхъ и въ сторонахъ цилиндра, суть больше поверхности цилиндра, которая по дугѣ ABC .

Проведи касательную къ кругу ABC прямую EF ; и чрезъ точки E , F проведи параллельныя прямая къ оси цилиндра, продолживъ оныя до плоскости другаго основанія. Итакъ параллелограммы, содержащиеся въ прямыхъ AG , GC и въ сторонахъ цилиндра, суть больше параллелограммовъ, содержащихся въ AE , EF , FC и въ сторонахъ же цилиндра: ибо EG , GF больше EF , придай обще AE , FC , посему цѣлыя GA , GC суть больше нежели AE , EF , FC . Пусть избытокъ однихъ параллелограммовъ предъ другими будетъ пространство K . Итакъ половина пространства K или больше фигуръ содержащихся въ прямыхъ AE , EF , FC и въ дугахъ AB , BC , или не больше.

Пусть, во первыхъ, будетъ больше. Поелику же поверхность сложенная изъ параллелограммовъ что на AE , EF , FC , изъ трапеціи $AEFC$ и изъ пропавулежащей ей на другомъ основаніи цилиндра, имѣетъ края на очертаніи параллело-

грамма спящего на AC ; а и поверхности сложенной изъ цилиндрической что по ABC , изъ отрезка ABC и изъ противоположащаго ему, края сущъ на томъ же очершаніи: то помянутыя обѣ поверхности имѣютъ тѣже края и на одной плоскости. Онѣ же выпуклы съ тойже стороны; и одна изъ нихъ частію объемлется другою, а остальную часть имѣетъ общую: посему поверхность объемлемая ^{пол. 4.} есть меньшая. И поному, отнявъ обще отрезокъ ABC и противоположащій, будетъ поверхность цилиндра что по дугѣ ABC , меньше поверхности сложенной изъ параллелограммовъ что на AE , EF , FC , изъ фигуръ AEB , BFC и изъ противоположащихъ имъ. Но поверхности помянутыхъ параллелограммовъ, купно съ сказанными фигурами, сущъ меньше поверхности сложенной изъ параллелограммовъ что на AG , GC ; ибо первые, купно съ пространствомъ K , которое больше фигуръ, равны послѣднимъ: чего ради параллелограммы, содержимые въ прямыхъ AG , GC и въ сторонахъ цилиндра, сущъ больше поверхности цилиндра, что по дугѣ ABC .

Если же пространство K не больше

сказанныхъ фигуръ, что должно проводить касательныя къ кругу, пока получатся облекающія фигуры, кои меньше пространства K : и слѣдующее попомъ докажешь какъ и прежде.

Доказавъ сіе, легко уже изъ преждесказаннаго видѣть, что ежели въ прямомъ конусѣ впишется пирамида; то поверхность ея, кромѣ основанія, есть меньше конической поверхности. Ибо, какъ изъ треугольниковъ содержащихъ пирамиду, каждый меньше конической поверхности что между сторонами треугольника: слѣдственно и цѣлая поверхность пирамиды, кромѣ основанія, будетъ меньше поверхности конуса, кромѣ основанія же.

А ежели около прямого конуса опишется пирамида; то поверхность пирамиды, кромѣ основанія, будетъ больше поверхности конуса, также кромѣ основанія.

Еще же явствуетъ изъ преждедоказаннаго, что ежели въ прямомъ цилиндрѣ впишется призма; то поверхность призмы, сложенная изъ параллелограммовъ, есть меньше поверхности цилиндра, кромѣ основанія. Ибо каждый параллело-

граммъ призмы есть меньше поверхности цилиндра, которая на немъ.

А ежели около прямого цилиндра опишется призма; то поверхность призмы, сложенная изъ параллелограммовъ, будетъ больше поверхности цилиндра, также кромѣ основанія.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Поверхность всякаго прямого цилиндра, кромѣ основаній, равна кругу, коего радиусъ есть средняя пропорціональная между стороною цилиндра и поперечникомъ его основанія.

Пусть будетъ основаніе какого нисешь прямого цилиндра кругъ А; и пусть будетъ равна поперечнику круга А прямая CD, а сторонѣ цилиндра прямая EF. Между DC, EF возьми среднюю пропорціональную G; и изложи кругъ В, коего радиусъ равенъ G. Надлежитъ доказать, что кругъ В равенъ поверхности цилиндра, кромѣ основаній.

Ибо естли не равенъ, то или больше, или меньше.

Пусть вопервыхъ, будетъ, естли возможно, меньше. И поелику суть двѣ

величины неравныя, поверхность цилиндра и кругъ В; по возможно вписать многоугольникъ равноспоронный въ кругѢ В и около него описать другой, такіе, чшобъ описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели поверхность цилиндра къ кругу В[†]. Вообрази тако- +6.
вые многоугольники описанный и вписанный; и около круга А опиши многоугольникъ подобный описанному около круга В; и на томъ многоугольникѢ составь призму описанную около цилиндра; и пусть очерпанію многоугольника описаннаго около круга А равна будетъ КD, а прямой КD равна LF; и пусть половина прямой CD будетъ СТ. Ишакъ треугольникъ КDТ равенъ многоугольнику описанному около круга А; ибо основаніе имѣетъ равное очерпанію многоугольника, а высоту равную радіусу круга А: а параллелограммъ EL равенъ поверхности призмы описанной около цилиндра; ибо содержишся въ споронѢ цилиндра и въ прямой, равной очерпанію основанія призмы. Сдѣлай ER равную EF: посему треугольникъ FRL равенъ параллелограмму EL, слѣдовательно и поверхности призмы. И поелику многоугольники, опи-

санные около круговъ А, В, подобны; по
они суть взаимно какъ квадрашы изъ
радіусовъ: посему какъ треутольникъ КТД
къ многоутольнику описанному около кру-
га В, такъ квадрашъ изъ ТД къ квадра-
пу изъ Г, ибо ТД, Г равны радіусамъ
круговъ. Но какъ квадрашъ изъ ТД къ
 сл. 2, 20^{VI} квадрапу изъ Г, такъ ТД къ RF. Ибо
 Г, будучи среднею пропорціональною ме-
жду CD, EF, есть таковая же средняя
между ТД, RF; и вошъ почему? Поелику
DT равна TC, а RE равна EF, то CD
есть двукрашная прямой ТД, а RF пря-
мой RE; посему какъ DC къ DT, такъ
 с. в. RF къ FE; а посему прямоутольникъ въ
CD, EF равенъ прямоутольнику въ ТД,
 16, VI. RF. Примоутольнику же въ CD, EF ра-
 17, VI. венъ квадрашъ изъ Г; посему и квадрашъ
изъ Г равенъ прямоутольнику въ ТД, RF:
слѣдовательно какъ ТД къ Г, такъ Г
къ RF. Чего ради какъ квадрашъ изъ ТД
къ квадрапу изъ Г, такъ ТД къ RF: ибо,
ежели три прямыя пропорціональны, то
какъ первая къ прешней, такъ фигура
изъ первой къ фигурѢ подобной и подо-
бно написанной изъ второй. — А какъ ТД
къ RF, такъ треутольникъ КТД къ пре-
 1, VI. утольнику RLF, ибо КД, LF взаимно рав-

ны. Посему* какъ преугольникъ KTD къ ^{*и, v.} многоугольнику описанному около круга В, такъ преугольникъ KTD къ преугольнику RLF. Чего ради* преугольникъ FLR ра- ^{*с, v.}венъ многоугольнику описанному около круга В: а посему и поверхность призмы описанной около цилиндра, равна многоугольнику описанному около круга В. И поелику многоугольникъ описанный около круга В, къ вписанному въ семь же кругѢ, имѣеть меньшее опношеніе, нежели поверхность цилиндра А къ кругу В; по и поверхность призмы описанной около цилиндра, къ многоугольнику вписанному въ кругѢ В, имѣеть меньшее опношеніе, нежели поверхность цилиндра къ кругу В; такожь и премѣненіемъ*, что невозмож- ^{*с, v.}но (32): ибо поверхность призмы описанной около цилиндра, по доказанному[†], ^{†13.} больше поверхности цилиндра, а многоугольникъ вписанный въ кругѢ В меньше круга В[†]. Ипакъ кругъ В не меньше по- ^{†11.}верхности цилиндра.

Но пусть, естли возможно, будетъ больше. Вообрази оянь многоугольникъ вписанный въ кругѢ В и около него описанный другой, такіе, чшобы описанный къ вписанному имѣль меньшее опноше-

ніе, нежели кругъ В къ поверхности цилиндра[†]; и впиши въ кругъ А многоугольникъ подобный вписанному въ кругъ В; и на многоугольникъ, въ А вписанномъ, составь призму; и пусть опять будетъ КD равная очерпанію многоугольника вписаннаго въ кругъ А, и FL равная сей прямой. Инакъ треугольникъ KTD будетъ больше многоугольника вписаннаго въ кругъ А; ибо имѣетъ основаніе равное его очерпанію, а высоту больше перпендикуляра, опущеннаго отъ центра къ одной изъ сторонъ многоугольника проведеннаго: а параллелограммъ EL равенъ вписанной призмы поверхности сложенной изъ параллелограммовъ; ибо онъ содержится въ сторонѣ цилиндра и въ прямой равной очерпанію многоугольника, который есть основаніе призмы; слѣдовательно и треугольникъ RLF равенъ поверхности призмы. И поелику многоугольники вписанные въ кругахъ А, В, подобны, то они суть взаимно, какъ квадраты изъ радиусовъ круговъ; а и треугольники KTD, FRL суть взаимно тоже какъ квадраты изъ радиусовъ круговъ (33): посему какъ многоугольникъ вписанный въ кругъ А, къ многоугольнику вписанному

въ В, такъ преугольникъ KTD къ преугольнику LFR. Но многоугольникъ вписанный въ кругъ А, меньше преугольника KTD; посему и многоугольникъ вписанный въ кругъ В, есть меньше преугольника FRL, слѣдственно меньше и поверхности призмы вписанной въ цилиндръ; что невозможно. Ибо, какъ многоугольникъ описанный около круга В, къ вписанному имѣеть меньшее отношеніе, нежели кругъ В къ поверхности цилиндра, такожь и премѣненіемъ; а многоугольникъ описанный около круга В, больше самаго круга В[†]: посему и много-^{+2.}угольникъ вписанный въ кругъ В есть больше поверхности цилиндра, и слѣдовательно больше поверхности призмы. Ипакъ кругъ В не больше поверхности цилиндра. Доказано же, что и не меньше, слѣдовательно ей равенъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Поверхность всякаго прямого конуса, кромѣ основанія, равна кругу, коего радиусъ есть средняя пропорціональная между стороною конуса и радиусомъ круга его основанія.

Пусть будетъ прямой конусъ, коего основаніе кругъ A , и C радіусъ онаго; и пусть D будетъ равная сторонѣ конуса, а E средняя пропорціональная между C , D ; и наконецъ пусть будетъ B кругъ, имѣющій радіусъ равный E . Говорю, что кругъ B равенъ поверхности конуса, кромѣ основанія.

Ибо, еслили не равенъ, то или больше, или меньше.

Пусть, во первыхъ, будетъ меньше. И поелику суть двѣ неравныя величины, поверхность конуса и кругъ B , изъ коихъ поверхность конуса бѣлая; то возможно вписать равносторонный многоугольникъ въ кругъ B и около него описать подобный вписанному, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели поверхность конуса къ кругу B . Вообрази « сіи многоугольники, » и еще многоугольникъ, описанный около круга A , подобный описанному около круга B ; и на многоугольникѣ описанномъ около круга A , возставь пирамиду, имѣющую ту же вершину что и конусъ. Ишакъ, поелику многоугольники, описанные около круговъ A , B , подобны, то они суть взаимно какъ квадраты изъ

радіусовъ круговъ, то есть какъ квадраты изъ С, Е, или какъ С къ D. Но какъ С къ D, такъ многоугольникъ описанный около круга А, къ поверхности пирамиды описанной около конуса: ибо С равна перпендикулярю, опущенному изъ центра круга къ одной изъ сторонъ многоугольника проведенному; а D равна сторонѣ конуса; очертаніе же многоугольника есть общая высота двухъ прямоугольниковъ, коихъ половины суть, многоугольникъ описанный около круга А и поверхность пирамиды описанной около конуса. Посему многоугольникъ описанный около круга А, къ многоугольнику описанному около круга В, имѣетъ такое отношеніе, что и къ поверхности пирамиды описанной около конуса: чего ради поверхность пирамиды равна многоугольнику описанному около круга В. Поелику же многоугольникъ описанный около круга В, къ вписанному имѣетъ меньшее отношеніе, нежели поверхность конуса къ кругу В; посему и поверхность пирамиды описанной около конуса, къ многоугольнику вписанному въ кругъ В, будетъ имѣть меньшее отношеніе, нежели поверхность конуса къ кругу В; «и претѣненіемъ,» что невоз-

можно (32): ибо поверхность пирамиды, *13. по доказанному[†], больше поверхности конуса, многоугольникъ же вписанный въ кругъ В меньше круга В. Итакъ кругъ В не меньше поверхности конуса.

Говорю такожь, что и не больше. Ибо, естли возможно, пусть будетъ больше. Вообрази оныя многоугольникъ вписанный въ кругъ В и около него описанный другой, такіе, чшобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели кругъ В къ поверхности конуса; и впиши въ кругъ А многоугольникъ подобный вписанному въ кругъ В; и возставь на шомъ многоугольникѣ пирамиду, имѣющую ту же вершину что и конусъ. И поелику многоугольники, вписанные въ кругахъ А, В, подобны; то они суть

1, XII. взаимно какъ квадраты изъ радіусовъ: посему многоугольникъ къ многоугольнику имѣетъ тоже отношеніе, что и С къ D. Но С къ D имѣетъ большее отношеніе, нежели многоугольникъ вписанный въ кругъ А, къ поверхности пирамиды вписанной въ конусъ: ибо радіусъ круга А къ сторонѣ конуса имѣетъ большее отношеніе, нежели перпендикуляръ, опущенный къ сторонѣ многоугольника про-

веденный, къ перпендикуляру, проведенному отъ вершины конуса къ споронѣ тогожъ многоугольника (34). Посему многоугольникъ вписанный въ кругъ А, къ многоугольнику вписанному въ кругъ В, имѣетъ большее отношеніе, нежели тошъ же многоугольникъ къ поверхности пирамиды: а посему поверхность пирамиды есть больше многоугольника вписаннаго въ кругъ В. Поелику же многоугольникъ описанный около круга В, къ многоугольнику въ немъ вписанному, имѣетъ меньшее отношеніе, нежели кругъ В къ поверхности конуса: посему многоугольникъ описанный около круга В, къ поверхности пирамиды вписанной въ конусѣ, шѣмъ паче имѣетъ меньшее отношеніе, нежели кругъ В къ поверхности конуса (35), что невозможно (32): ибо многоугольникъ описанный больше круга В, а поверхность пирамиды вписанной въ конусѣ, меньше поверхности конуса. Итакъ кругъ В не больше поверхности конуса. А доказано, что и не меньше: слѣдственно ей равенъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Поверхность всякаго прямого конуса къ его основанію имѣеть тоже отношеніе, что сторона конуса къ радіусу основанія.

Пусть будетъ прямой конусъ, коего основаніе кругъ A , и пусть будетъ B равна радіусу круга A , а C сторонѣ конуса. Надлежитъ доказать, что поверхность конуса къ кругу A имѣеть тоже отношеніе, что и C къ B .

Возьми между B , C среднюю пропорціональную E ; и изложи кругъ D , коего радіусъ равенъ E . Ипакъ кругъ D равенъ поверхности конуса, по доказанному 15. предъ симъ. Еще же доказано, что кругъ D къ кругу A имѣеть тоже отношеніе, что C къ B . Ибо каждое изъ сихъ отношеній есть тоже съ отношеніемъ квадрата изъ E къ квадрату изъ B ; по причинѣ что круги суть взаимно какъ квадраты изъ поперечниковъ, равно какъ и изъ радіусовъ, поелику отношенія поперечниковъ суть тѣже, что и ихъ половинъ, то есть радіусовъ, коимъ равны B , E . Ипакъ явно, что поверхность

конуса къ кругу А имѣеть поже отно-
шеніе, что и С къ В.

ЛЕММА. Пусть будетъ параллелограммъ
BAG, и BG его поперечникъ. Раздѣли спо-
рону BA какъ нисеть въ точкѣ D; и
проведи чрезъ D параллельную къ AG пря-
мую DH, и чрезъ F параллельную къ
BA прямую KL. Говорю, что прямоуголь-
никъ въ BA, AG равенъ прямоугольнику
въ BD, DF, и купно прямоугольнику
содержимому въ DA и въ прямой сложен-
ной изъ DF, AG.

И дѣйствительно, прямоугольникъ въ
BA, AG есть цѣлое BG, прямоугольникъ
же въ BD, DF есть BF; а прямоуголь-
никъ, содержащийся въ DA и въ прямой
сложенной изъ DF, AG, есть наугольникъ
MNO, ибо прямоугольникъ въ DA, AG
равенъ KG, попому что дополненіе KH
равно дополненію DL*; и прямоугольникъ
въ DA, DF равенъ DL. Чего ради и цѣлое BG,
то есть прямоугольникъ въ BA, AG равенъ
прямоугольнику въ BD, DF и науголь-
нику MNO, который равенъ прямоуголь-
нику въ DA и въ прямой сложенной изъ
AG, DF (36).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Ежели прямой конусъ разсѣчется плоскостію параллельною къ основанію; то поверхность конуса, которая между параллельныхъ плоскостей, равна кругу, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между стороною конуса, опущенною параллельными плоскостями, и прямою равною обоимъ радіусамъ круговъ, кои на параллельныхъ плоскостяхъ.

Пусть будетъ конусъ, коего преугольникъ проходящій чрезъ ось, равенъ преугольнику ABC . Разсѣки оный плоскостію параллельною къ основанію, которая пусть сдѣлаетъ сѣченіе DE ; и пусть BG будетъ ось конуса; и изложи кругъ, коего радіусъ былъбы средняя пропорціональная между AD и DF съ GA , и пусть сей кругъ будетъ H . Говорю, что кругъ H равенъ поверхности конуса, которая между DE , AC .

Ибо изложи круги L , K , такіе, чтобы квадрапъ изъ радіуса круга K былъ равенъ прямоугольнику въ BD , DF ; а квадрапъ изъ радіуса круга L равенъ прямоугольнику въ BA , AG : посему кругъ L равенъ поверхности конуса ABC , а кругъ

К поверхности конуса DEB^+ . И поелику ^{+15.} прямоугольникъ въ BA , AG равенъ прямоугольнику въ BD , DF , и прямоугольнику содержимому въ AD и въ прямой сложенной изъ DF , AG^+ , по причинѣ что DF ^{+въ 16, лем.} параллельна въ AG : но прямоугольникъ въ AB , AG равенъ квадрату изъ радиуса круга L ; а прямоугольникъ въ BD , DF равенъ квадрату изъ радиуса круга K ; прямоугольникъ же, содержаемый въ DA и въ прямой сложенной изъ DF , AG , равенъ квадрату изъ радиуса круга H : посему квадратъ изъ радиуса круга L равенъ квадратамъ изъ радиусовъ круговъ K , H , слѣдственно и кругъ L равенъ кругамъ K , H (37). Но кругъ L равенъ поверхности конуса BAC , а кругъ K поверхности конуса DBE : чего ради оспальная поверхность конуса, которая между параллельными плоскостями DE , AC , равна кругу H .

Л Е М М Ы.

1. Конусы имѣющіе равныя высоты, суть взаимно какъ основанія*: А имѣющіе ^{*11, XII.} равныя основанія, суть взаимно какъ высоты*.

^{*14, XII.}

2. Ежели цилиндръ разсѣченъ плоскостію параллельною къ основаніямъ, то

произшедшіе цилиндры будутъ взаимно

13, XII. какъ оси.

3. Когда конусы и цилиндры (38) имѣютъ тѣже основанія, то конусы суть взаимно, какъ цилиндры.

4. Равныхъ конусовъ основанія обратно пропорціональны высотамъ: и копорыхъ конусовъ основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равные*.

15, XII. 5. Конусы, коихъ основаній поперечники пропорціональны высотамъ, то есть осямъ, суть взаимно въ упроенномъ отношеніи поперечниковъ основаній.

*12, XII. Все сіе доказано нашими предшественниками.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Ежели будутъ два прямые конуса такіе, что поверхность одного равна основанію другаго, и перпендикуляръ проведенный отъ центра основанія къ сторонѣ перваго, равенъ высотѣ другаго; то конусы будутъ равные.

Пусть будутъ два прямые конуса ABC, DEF такіе, чтобы конуса ABC основаніе было равно поверхности конуса DEF, а высота AG равна перпендикуляру КН, отъ центра Н къ одной изъ сторонъ

конуса, напริมѣрь къ DE , проведенному. Говорю, что конусы равны.

Поелику основаніе конуса ABC равно поверхности конуса DEF ; а равныя къ тойже имѣющъ тоже отношеніе*: по *7. V. какъ основаніе конуса BAC къ основанію конуса DEF , такъ поверхность конуса DEF къ основанію конуса DEF . Но какъ поверхность сего конуса къ его основанію, такъ DN къ NK . Ибо доказано, что поверхность всякаго прямого конуса къ его основанію имѣетъ тоже отношеніе, что сторона къ радіусу основанія, то есть, тоже что DE къ EN †; припомъ же †16. какъ ED къ NE , такъ DN къ NK , ибо треугольники « DEN , DKN » суть равноугольные; и NK равна AG . Посему какъ основаніе конуса BAC къ основанію конуса DEF , такъ высота конуса DEF къ высотѣ конуса ABC . Чего ради основанія конусовъ ABC , DEF суть обратно пропорціональны высотамъ. Посему конусъ BAC равенъ конусу DEF .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Всякому, сложенному изъ двухъ прямыхъ конусовъ, ромбу равенъ конусъ, имѣющій основаніе равное поверхности

одного изъ конусовъ составляющихъ ромбъ, а высоту равную перпендикуляру, проведенному отъ вершины другого конуса на сторону первого.

Пусть будетъ, сложенный изъ двухъ прямыхъ конусовъ, ромбъ $ABCD$, коего основаніе естъ кругъ написанный около поперечника BC , а высота AD ; и сверхъ того конусъ $ГНК$, имѣющій основаніе равное поверхности конуса ABC , а высоту равную перпендикуляру, отъ D къ AB или къ ея продолженію, проведенному, который пусть будетъ DF ; и пусть высота конуса $ГНК$ будетъ прямая HL , которая равна DF . Говорю, что ромбъ $ABCD$ равенъ конусу $ГНК$.

Изложи другой конусъ MNO , имѣющій основаніе равное основанію конуса ABC , а высоту равную AD ; и пусть его высота будетъ NP . Ипакъ, поелику NP равна AD , то какъ NP къ DE , такъ AD *7, v. къ DE *. Но какъ AD къ DE , такъ ромбъ *14, xi, и $ABCD$ къ конусу BCD *; а какъ NP къ DE , *18, v. такъ конусъ MNO къ конусу BCD , ибо основанія ихъ равны: посему какъ конусъ MNO къ конусу BCD , такъ ромбъ $ABCD$ къ конусу BCD . Чего ради конусъ MNO *9, v. равенъ ромбу $ABCD$ *. И поелику поверх-

ность конуса ABC равна основанію конуса GHK : то какъ поверхность конуса ABC къ его основанію, такъ основаніе конуса GHK къ основанію конуса MNO ; ибо основаніе конуса ABC равно основанію конуса MNO . Но какъ поверхность конуса ABC къ его основанію, такъ AB къ BE^+ , то есть AD къ DF , ибо прѣ-[†] $x6$ угольники ABE , ADF подобны: посему и какъ основаніе конуса GHK къ основанію конуса MNO , такъ AD къ DF . Но AD равна NP , по положенію; и DF равна LN : посему какъ основаніе конуса GHK къ основанію конуса MNO , такъ высота NP къ высотѣ NL . И такъ основанія конусовъ GHK , MNO суть обратно пропорціональны высотамъ: слѣдственно сіи конусы равны. Доказано же, что конусъ MNO равенъ ромбу $ABCD$: посему и конусъ GHK равенъ ромбу $ABCD$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Ежели прямой конусъ разсѣченъ плоскостію параллельною къ основанію; а на произшедшемъ кругѣ напишется конусъ, имѣющій вершину въ центрѣ основанія; и произшедшій ромбъ опишется отъ цѣлаго конуса: то остатку будетъ

равенъ конусъ, имѣющій основаніе равное поверхности конуса, которая между параллельныхъ плоскостей, а высоту равную перпендикуляру, отъ центра основанія къ одной изъ сторонъ конуса проведенному.

Пусть будетъ прямой конусъ ABC . Разсѣки оный плоскостію параллельною къ основанію, которая пусть сдѣлаетъ сѣченіе DE ; и пусть центръ основанія будетъ F , и на кругѣ, что около поперечника DE , написанъ будетъ конусъ, имѣющій вершину въ F : то получится ромбъ $BDFE$ сложенный изъ двухъ прямыхъ конусовъ. Пусть еще будетъ конусъ KHL , коего основаніе равно поверхности что между DE , AC , а высота равна перпендикуляру FG , отъ F къ AB проведенному. Говорю; что естли отъ конуса ABC отнять ромбъ $BDFE$, то остатокъ будетъ равенъ конусу HKL .

Изложи еще два конуса MNO , QPR такіе: — чтобы основаніе конуса MNO равно было поверхности конуса ABC , а высота равна FG ; посему конусъ MNO равенъ конусу ABC : ибо естли будутъ два прямые конуса, въ коихъ поверхность одного равна основанію другого, а перпен-

дикуляръ, проведенный отъ центра основанія къ сторонѣ перваго, равенъ высотѣ другаго, по сіи конусы равны[†]: — и чтобы^{† 18.} основаніе конуса PQR было равно поверхности конуса BDE , а высота равна FG : посему конусъ PQR равенъ ромбу $BDFE$ [†]; все^{† 19.} какъ доказано выше. И поелику поверхность конуса ABC сложена изъ поверхности конуса BDE , и поверхности что между DE , AC : поверхность же конуса ABC равна основанію конуса MNO ; а поверхность конуса BDE равна основанію конуса PQR ; и которая между DE , AC , равна основанію конуса HKL : посему основаніе конуса MNO равно основаніямъ конусовъ HKL , PQR . И сіи всѣ конусы суть одинакой высоты: посему конусъ MNO равенъ конусамъ HKL , PQR . Но конусъ MNO равенъ конусу ABC , а конусъ QPR ромбу $BDEF$: чего ради оспальный конусъ HKL равенъ остатку отъ конуса ABC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Ежели ромба, сложенного изъ двухъ прямыхъ конусовъ, одинъ конусъ разсѣчется плоскостію параллельною къ основанію; и на произшедшемъ кругѣ напишется конусъ, имѣющій ту же верши-

ну съ другимъ конусомъ ромба; и произшедшій ромбъ опишется отъ цѣлаго: то остатку будетъ равенъ конусъ, имѣющій основаніе равное поверхности что между параллельными плоскостями, а высоту равную перпендикуляру, отъ вершины второго конуса къ сторонѣ первого проведенному.

Пусть будетъ $ABCD$ ромбъ, сложенный изъ двухъ прямыхъ конусовъ. Разсѣки одинъ изъ нихъ плоскостію параллельною къ основанію, которая пусть сдѣлается сѣченіе EF ; и на кругѣ, что около поперечника EF , пусть написанъ будетъ конусъ, имѣющій вершину въ D : то получится ромбъ $EBFD$; и вообрази что онъ опишетъ отъ цѣлаго ромба; и изложи конусъ NKL , имѣющій основаніе равное поверхности что между AC , EF , а высоту равную перпендикуляру, отъ точки D къ прямой BA , или къ ея продолженію, проведенному. Говорю, что конусъ NKL равенъ помянутому остатку.

Изложи еще два конуса MNO , PQR такіе: — чтобы основаніе конуса MNO равно было поверхности конуса ABC , а высота равна DG : то въ силу доказаннаго, конусъ MNO равенъ ромбу $ABCD$: —

и чтобы основаніе конуса PQR равно было поверхности конуса EBF , а высота равна DG : посему также конусъ PQR равенъ ромбу $EBFD$ [†]. И поелику поверхность конуса ABC сложена изъ поверхности конуса EBF , и изъ поверхности что между EF , AC : поверхность же конуса ABC равна основанію конуса MNO ; а поверхность конуса EBF равна основанію конуса PQR ; и которая между EF , AC , равна основанію конуса HKL : посему основаніе конуса MNO равно основаніямъ конусовъ PQR , HKL . И сіи всѣ конусы суть одинакой высоты: посему конусъ MNO равенъ конусамъ HKL , PQR . Но конусъ MNO равенъ ромбу $ABCD$, а конусъ PQR ромбу $EBFD$: чего ради остальной конусъ HKL равенъ остатку отъ ромба $ABCD$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Ежели въ кругѣ впишется многоугольникъ четносторонный (39) и равноспоронный; и просянущся въ семь многоугольникѣ діагонали (40), кои будутъ параллельны къ одной изъ ссытывающихъ его «соприкосновенныхъ» спороны: то всѣ діагонали къ поперечнику круга будутъ имѣть тоже отношеніе, что

прямая, спягивающая безъ одной половину споронъ, къ споронѢ многоугольника.

Пусть будетъ кругъ ABCD; и пусть въ немъ будетъ вписанъ многоугольникъ AEFBGHSCMNDLK, и пропянутся ЕК, FL, BD, GN, HM: то явно, что сіи прямыя параллельны къ спягивающей двѣ спороны многоугольника. Говорю, что всѣ помянутыя прямыя къ поперечнику АС круга имѣють тоже отношеніе, что СЕ къ ЕА.

Пропаши FK, LB, GD, HN. Ипакъ FK параллельна къ ЕА, а BL къ FK, а DG къ BL, а HN къ DG, и еще CM къ HN. И поелику двѣ прямыя ЕА, KF параллельны, и проведены двѣ же ЕК, АР:

*4. и, то какъ ЕО къ ОА, такъ КО къ ОР; и какъ КО къ ОР, такъ FQ къ QR: и какъ FQ къ QR, такъ LQ къ QR; и какъ LQ къ QR, такъ BS къ SR; и какъ BS къ SR, такъ DS къ ST; и какъ DS къ ST, такъ GU къ UT; и какъ GU къ UT, такъ NU къ UV; и какъ NU къ UV, такъ НХ къ XV; и еще, какъ НХ къ XV, такъ МХ къ ХС.

Посему и какъ всѣ ко всѣмъ, такъ одна

12. у. къ одной, то есть, какъ ЕО къ ОА, такъ ЕК, FL, BD, GN, HM къ поперечнику АС. Но какъ ЕО къ ОА, такъ СЕ

къ EA : чего ради какъ CE къ EA , такъ *3, ит. EK, FL, BD, GN, HM къ поперечнику AC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

Ежели въ ошрѣзкѣ круга впишется многоугольникъ, имѣющій стороны, кромѣ основанія, всѣ взаимно равныя и въ чешномъ числѣ, и пропянутыя параллельныя къ основанію ошрѣзка діагонали многоугольника: то всѣ пропянутыя и половина основанія будутъ къ высотѣ ошрѣзка имѣть тоже отношеніе, что прямая, проведенная отъ конца поперечника до стороны многоугольника, къ сторонѣ многоугольника.

Пусть будетъ въ кругѣ ABC проведена нѣкая прямая AC , и въ ошрѣзкѣ ABC , надъ AC , вписанъ многоугольникъ, имѣющій стороны, кромѣ основанія AC , всѣ взаимно равныя и въ чешномъ числѣ, и пропянуты FG, EH , кои параллельны къ основанію ошрѣзка. Говорю, что какъ FG, EH, AO къ BO , такъ DF къ FB .

Ибо опять пропянувъ GE, AH , будутъ оныя параллельны къ BF . И попому же будетъ: какъ KF къ KB , такъ GK къ KL , такъ EM къ ML , такъ MH къ MN , и такъ OA къ ON . Посему какъ всѣ ко

всѣмъ, такъ одна къ одной, то есть, какъ FG , EH , AO къ BO , такъ FK къ KB . Но какъ FK къ KB , такъ DF къ FB : чего ради какъ DF къ FB , такъ FG , EH , AO къ BO .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

Пусть будетъ шара наибольшій кругъ $ABCD$; и въ немъ пусть впишется многоугольникъ равноспоронный, коего число споронъ дѣлимо на чешыре; и пусть будутъ два поперечника AC , BD « взаимно перпендикулярные.» Ежели около неподвижнаго поперечника, AC оборотится кругъ $ABCD$, имѣя многоугольникъ: то явно, что окружность его перенесется по поверхности шара; многоугольника же углы, кромѣ тѣхъ, кои при точкахъ A , C , перенесутся по окружностямъ круговъ, написанныхъ на плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ кругу $ABCD$, и поперечники ихъ будутъ діAGONАЛИ параллельныя къ BD ; спороны же многоугольника перенесутся по нѣкоторымъ конусамъ, а именно: AF , AN по поверхности конуса, коего основаніе кругъ около поперечника FN , а вершина точка A ; FG , MN по конической поверхности, коея основаніе кругъ

около поперечника MG , а вершина та почка, въ кошорой FG , MN продолженные встрѣяшся взаимно и съ AC ; а стороны BG , MD по конической поверхности, коея основаніе кругъ около поперечника BD , перпендикулярный къ кругу $ABCD$, а вершина та почка, въ кошорой BG , DM продолженные встрѣяшся взаимно и съ CA . Такожь и въ другомъ полушаріи стороны перенесушся по коническимъ поверхностямъ, одинакимъ съ преждесказанными. Такимъ образомъ въ шарѣ впишется нѣкая, содержащая во всѣхъ помянутыхъ коническихъ поверхностяхъ, фигура, коея поверхность будетъ меньше поверхности шара.

Ибо, отъ разсѣченія шара плоскостію, чрезъ BD проходящею, перпендикулярною къ кругу $ABCD$, какъ поверхность одного изъ полушарій, такъ и поверхность фигуры въ немъ вписанной, имѣють тѣже края на одной плоскости, ибо обѣихъ поверхностей предѣль естъ окружность круга, около поперечника BD написаннаго, перпендикулярнаго къ кругу $ABCD$; и сущь обѣ выпуклы съ тойже стороны; и одна изъ нихъ объемлется другою, и тѣже съ нею края имѣющею,

* пол. 4. плоскостію*. Подобно и поверхность фигуры, вписанной въ другомъ полушаріи, есть меньше поверхности полушарія. Чего ради и цѣлая поверхность фигуры въ шарѣ вписанной, меньше поверхности шара.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Поверхность фигуры вписанной въ шарѣ равна кругу, изъ радіуса коего квадратъ равняется прямоугольнику, содержимому въ споронѣ фигуры и въ прямой равной всѣмъ діагоналямъ многоугольника, составляющимъ чебыреугольники, и параллельнымъ къ спягивающей двѣ стороны многоугольника.

Пусть будетъ шара наибольшій кругъ ACBD; и пусть въ немъ будетъ вписанъ равносторонный многоугольникъ, коего число споронъ дѣлимо на четыре; и вообрази въ шарѣ фигуру вписанную посредствомъ многоугольника вписаннаго; и просяни діагонали EF, GH, CD, KL, MN, параллельныя къ спягивающей двѣ стороны многоугольника; и изложи кругъ O, изъ коего радіуса квадратъ былъ бы равенъ прямоугольнику содержимому въ AE и въ прямой равной прямымъ EF, GH,

CD, KL, MN. Говорю, что сей кругъ равенъ поверхности фигуры вписанной въ шарѢ.

Изложи еще круги P, Q, R, S, T, U такіе, чтобы квадрапъ изъ радіуса круга P былъ равенъ прямоугольнику въ EA и въ половинѢ прямой EF; квадрапъ изъ радіуса круга Q прямоугольнику въ EA и въ половинѢ прямыхъ EF, GH; квадрапъ изъ радіуса круга R прямоугольнику въ EA и въ половинѢ прямыхъ GH, CD; квадрапъ изъ радіуса круга S прямоугольнику въ AE и въ половинѢ прямыхъ CD, KL; квадрапъ изъ радіуса круга T прямоугольнику въ AE и въ половинѢ прямыхъ KL, MN; и квадрапъ изъ радіуса круга U прямоугольнику въ AE и въ половинѢ MN. Ипакъ кругъ P равенъ поверхности конуса AEF⁺, кругъ Q поверхности ко-^{+15.} нуса, кошорая между EF, GH⁺, кругъ R^{+17.} шой, кошорая между GH, CD, кругъ S шой, кошорая между DC, KL, и еще кругъ T поверхности конуса, кошорая между KL, MN, а кругъ U равенъ поверхности конуса MBN: посему всѢ круги равны поверхности фигуры вписанной въ шарѢ. Припомъ явно, что квадрапы изъ радіусовъ круговъ P, Q, R, S, T, U равны

прямоугольнику, содержимому въ AE и въ половинѣ прямыхъ EF , GH , CD , KL , MN два раза взятыхъ*, которая и есть сіи самыя прямая EF , GH , CD , KL , MN : посему квадраты изъ радиусовъ круговъ P , Q , R , S , T , U равны прямоугольнику въ AE и во всѣхъ EF , GH , CD , KL , MN . Но и квадратъ изъ радиуса круга O равенъ прямоугольнику въ AE и въ прямой сложеной изъ EF , GH , CD , KL , MN : посему квадратъ изъ радиуса круга O равенъ квадратамъ изъ радиусовъ всѣхъ круговъ P , Q , R , S , T , U ; а посему кругъ O равенъ кругамъ P , Q , R , S , T , U (37). Доказано же, что круги P , Q , R , S , T , U равны поверхности помянутой фигуры: чего ради и кругъ O равенъ поверхности фигуры.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

Поверхность фигуры вписанной въ шаръ, содержимой въ коническихъ поверхностяхъ, есть меньше, нежели четырехъ кратный наибольшій кругъ шара.

Пусть будетъ шара наибольшій кругъ $ABCD$, и въ немъ вписанный равноспоронный и равноугольный многоугольникъ, имѣющій число сторонъ дѣлимое на че-

пыре; и вообрази вписанную посредствомъ его фигуру, содержащую въ коническихъ поверхностяхъ. Говорю, что поверхность фигуры вписанной есть меньше, нежели чепырекрапный наибольшій кругъ шара.

Проведи, стягивающія двѣ стороны многоугольника діагонали $ЕІ$, $НМ$, и параллельныя къ нимъ FK , DB , GL ; и изложи кругъ R такой, чтобы квадратъ изъ радіуса его былъ равенъ прямоугольнику, содержащему въ $ЕА$ и въ равной всѣмъ прямымъ $ЕІ$, FK , BD , GL , $НМ$: то по доказанному предъ симъ, кругъ R равенъ поверхности помянутой фигуры†. И поелику доказано же, что какъ прямая равная всѣмъ $ЕІ$, FK , BD , GL , $НМ$, къ поперечнику AC круга $ABCD$, такъ CE къ $ЕА$ †: посему прямоугольникъ содержащий въ прямой равной всѣмъ сказаннымъ и въ $ЕА$, то есть квадратъ изъ радіуса круга R равенъ прямоугольнику въ AC , CE . Но прямоугольникъ въ AC , CE меньше квадрата изъ AC : посему и квадратъ изъ радіуса круга R меньше квадрата изъ AC ; слѣдственно и радіусъ круга R меньше AC ; чего ради и поперечникъ круга R меньше, нежели двукрапный по-

перечникъ круга $ABCD$; и пошому два поперечника круга $ABCD$ суть больше поперечника круга R , и чetyрекрапный квадрапъ изъ поперечника круга $ABCD$, то есть изъ AC , больше квадрапа изъ поперечника круга R . Но какъ чetyрекрапный квадрапъ изъ AC къ квадрапу изъ поперечника круга R , такъ чetyре круга $ABCD$ къ кругу R : посеу чetyре круга $ABCD$ суть больше круга R ; итакъ кругъ R меньше, нежели чetyрекрапный наибольшій кругъ. А [кругъ R равенъ, по доказанному, поверхности помянутой фигуры]: слѣдовашельно поверхность фигуры меньше, нежели чetyрекрапный наибольшій кругъ шара.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

ФигурѢ вписанной въ шарѢ, содержи-
мой въ коническихъ поверхностяхъ, ра-
венъ конусъ, имѣющій основаніе кругъ
равный поверхности фигуры вписанной
въ шарѢ, а высоту равную перпендику-
ляру, отъ центра шара къ одной изъ
сторонъ многоугольника проведенному.

Пусть будетъ шаръ, и наибольшій его
кругъ $ABCD$, и все прочее какъ въ предъ-
идущемъ; и пусть будетъ прамый конусъ

R , имѣющій основаніе равное поверхности фигуры вписанной въ шарѣ, а высоту равную перпендикуляру, отъ центра шара къ одной изъ сторонъ многоугольника проведенному. Надлежитъ доказать, что конусъ R равенъ фигурѣ въ шарѣ вписанной.

На кругахъ, кои около поперечниковъ FN , GM , HL , IK , напиши конусы, имѣющіе вершину въ центрѣ шара: то составится тѣлесный ромбъ, изъ конуса, коего основаніе кругъ около поперечника FN , а вершина точка A , и изъ конуса, коего основаніе тотъ же кругъ, а вершина точка X . Сей ромбъ равенъ конусу, имѣющему основаніе равное поверхности конуса NAF , а высоту равную перпендикуляру, отъ X къ AF проведенному[†]; ^{†19.} остатокъ же отъ ромба, содержимый въ конической поверхности что между параллельныхъ плоскостей, чрезъ FN , GM проведенныхъ, и въ поверхностяхъ конусовъ FNX , GMX , равенъ конусу, имѣющему основаніе равное поверхности конуса, которая между параллельныхъ плоскостей, чрезъ FN , GM проходящихъ, а высоту равную перпендикуляру, отъ X къ FG проведенному: какъ по все сіе

- +21. уже доказано[†]. Также оспашокъ опъ конуса, содержащийся въ поверхности конуса, которая между параллельныхъ плоскостей чрезъ GM , BD проведенныхъ, и въ поверхностяхъ конуса GMX и круга что около поперечника BD , равенъ конусу, имѣющему основаніе равное поверхности конуса, которая между параллельныхъ плоскостей чрезъ GM , BD проведенныхъ, а высоту равную перпендикуляру, опъ
- +20. X къ BG проведенному[†]. Подобнымъ образомъ и въ другомъ полушаріи ромбъ $XKCI$ и оспашки будутъ равны таковымъ и поlikому числу конусовъ, о каковыхъ и о коликомъ числѣ оныхъ первѣе было сказано. Ишакъ явно, что цѣлая фигура въ шарѣ вписанная, равна всѣмъ помянутымъ конусамъ. Но сіи конусы равны конусу R : ибо конусъ R имѣетъ высоту равную высотѣ каждаго изъ помянутыхъ конусовъ, а основаніе равное всѣхъ ихъ основаніямъ. Слѣдственно явно, что фигура вписанная въ шарѣ, равна изложенному конусу R .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

Фигура вписанная въ шарѣ, содержащаяся въ коническихъ поверхностяхъ, есть

меньше нежели чепырекрашный конусъ, имѣющій основаніе равное наибольшему кругу шара, а высоту равную его радіусу.

Пусть будетъ R конусъ, которъй фигурѣ вписанной равенъ, то есть, имѣющій основаніе равное поверхности фигуры, а высоту равную перпендикулярѣ, опъ центра шара къ одной изъ споронъ многоугольника проведенному; и пусть еще будетъ конусъ O , имѣющій основаніе равное кругу $ABCD$, а высоту равную его радіусу.

Поелику конусъ R имѣетъ основаніе равное поверхности фигуры вписанной въ шарѣ, а высоту равную перпендикулярѣ, опъ X къ AF проведенному; доказано же, что поверхность фигуры вписанной меньше, нежели чепырекрашный наибольшій кругъ шара: посему основаніе ^{126.} конуса R есть меньше, нежели чепырекрашное основаніе конуса O . А и высота конуса R меньше высоты конуса O . Ипакъ, поелику конусъ R имѣетъ основаніе меньшее, нежели чепырекрашное основаніе конуса O , и высоту меньшую высоты его: то явно, что конусъ R меньше, нежели чепырекрашный конусъ O . Но конусъ R равенъ фигурѣ вписанной: по- ^{127.}

сему и фигура вписанная меньше, нежели чепырекрапный конусъ О.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

Пусть будетъ шара наибольшій кругъ ABCD; и пусть около круга ABCD опишется многоугольникъ равносторонный и равноугольный, коего число сторонъ дѣлимо на чепыре, а около него кругъ, кошорый объемля многоугольникъ имѣетъ

сл. 2: d, v. пусть же центръ что и кругъ ABCD; и около неподвижнаго поперечника EG пусть оборотится плоскость многоугольника EFGH и круга ABCD. Явно, что окружность круга ABCD перенесется по поверхности шара, а окружность круга EFGH перенесется по поверхности другаго шара, имѣющаго пусть же центръ, что и меньшій; точки же касанія сторонъ многоугольника напишутъ на поверхности меньшаго шара круги, перпендикулярные къ кругу ABCD; и углы многоугольника, кромѣ шѣхъ, кои при точкахъ Е, G, перенесутся по окружностямъ круговъ, на поверхности большаго шара написанныхъ, перпендикулярныхъ къ кругу EFGH; а стороны многоугольника перенесутся по коническимъ поверхностямъ;

какъ и прежде. Ишакъ фигура содержи-
мая въ коническихъ поверхностяхъ, бу-
дешъ описанная около меньшаго шара и
вписанная въ большемъ. Мы докажемъ
слѣдующимъ образомъ, что поверхность
описанной фигуры больше поверхности
шара.

Пусть будетъ KD поперечникъ одного
изъ круговъ меньшаго шара, и K , D
почки, въ коихъ двѣ стороны описан-
наго многоугольника касаются къ кругу
 $ABCD$. Когда же шаръ разсѣченъ плос-
костію проведенною чрезъ KD , перпен-
дикулярною къ кругу $ABCD$; то и по-
верхность фигуры описанной около шара,
разсѣчется пою же плоскостію. Явст-
вуешь же, что поверхности « опрѣз-
ковъ шара и фигуры » имѣють пѣже
края на плоскости, ибо и той и дру-
гой предѣлъ есть окружность круга,
около поперечника KD написаннаго, пер-
пендикулярнаго къ кругу $ABCD$; и что
обѣ выпуклы съ той же стороны, и одна 164 V
изъ нихъ объемлется другою и, пѣже съ
нею края имѣющею, плоскостію: посе-
му поверхность шароваго опрѣзка какъ
объемлемая, меньше фигуры описанной + пол. 4.
около сего опрѣзка. Подобно и поверх-

нось остальнаго опрѣзка меньше поверхности фигуры описанной около сего же опрѣзка. Слѣдственно и цѣлая поверхность шара есть меньше поверхности фигуры описанной.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Поверхность фигуры описанной около шара, равна кругу, изъ радіуса коего квадрашь равняется прямоугольнику, содержимому въ одной споронѣ многоугольника и въ прямой равной всѣмъ діagonalямъ его, параллельнымъ къ которой нисеть изъ шѣхъ, кои спягивають двѣ спороны многоугольника.

Ибо фигура описанная около меньшаго шара, есть вписанная въ большемъ. Доказано же, что поверхность фигуры вписанной въ шарѣ, содержимой въ коническихъ поверхностяхъ, равна кругу, изъ радіуса коего квадрашь равенъ прямоугольнику, содержимому въ одной споронѣ многоугольника и въ прямой равной всѣмъ его діagonalямъ, параллельнымъ къ которой нисеть изъ шѣхъ, кои спягивають двѣ спороны многоугольника[†]: слѣдственно вышесказанное явствуешь.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Поверхность фигуры описанной около шара, есть больше, нежели четырехкратный наибольший кругъ сего шара.

Пусть будетъ шаръ, кругъ, и все прочее, какъ сказано было прежде; и пусть будетъ кругъ L , равный поверхности изложенной фигуры, описанной около меньшаго шара.

Поелику въ кругѣ $EFGH$ вписанъ многугольникъ равносторонный и чешноугольный; то всѣ діагонали, параллельныя къ HF , имѣють къ HF поже опношеніе, что KN къ KF^+ . Посему прямоугольникъ, $+22$. содержимый въ одной споронѣ многугольника и въ прямой равной всѣмъ его діагоналямъ, равенъ прямоугольнику въ FH , NK^* : $*16, vi$. а посему и квадратъ изъ радіуса круга L равенъ прямоугольнику въ FH , NK^+ : $+25$. слѣдственно радіусъ круга L больше NK . Но NK равна поперечнику круга $ABCD$, ибо она двукратная прямой XS (41), которая есть радіусъ круга $ABCD$. Итакъ явно, что кругъ L , то есть поверхность фигуры описанной около шара, больше нежели четырехкратный наибольший кругъ шара.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

ФигурѢ описанной около меньшаго шара, равенъ конусъ, имѣющій основаніе кругъ равный поверхности Фигуры, а высоту равную радіусу шара.

Ибо фигура описанная около меньшаго шара, естъ вписанная въ большемъ. Доказано же, что ФигурѢ вписанной, содержащей въ коническихъ поверхностяхъ, равенъ конусъ, имѣющій основаніе кругъ равный поверхности Фигуры, а высоту равную перпендикуляру, опъ центра шара къ споронѢ многоугольника проведенному; и сей перпендикуляръ равенъ радіусу меньшаго шара: слѣдственно предложенное явствуетъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

Отсюда явствуетъ, что фигура описанная около меньшаго шара, больше нежели чепырекрапный конусъ, имѣющій основаніе наибольшій кругъ шара, а высоту равную его радіусу.

И дѣйствительно, поелику сей фигурѢ равенъ конусъ, имѣющій основаніе равное ея поверхности, а высоту равную перпендикуляру, опъ центра къ спо-

ронѣ многоугольника проведенному, по
 есть радіусу меньшаго шара; и поелику ^{+32.}
 поверхность фигуры описанной около
 шара, больше нежели чепырекрапный
 наибольшій его кругъ: то фигура опи- ^{+31.}
 санная около шара, есть больше неже-
 ли чепырекрапный конусъ, имѣющій
 основаніе наибольшій кругъ, а высоту
 радіусъ шара: ибо и конусъ ей равный,
 есть больше, нежели чепырекрапный
 помянутый конусъ*, пошому что имѣеть ^{*11, XII.}
 основаніе больше нежели чепырекрапное,
 а высоту равную.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIV.

Ежели въ шарѣ впишется фигура, и
 около него опишется другая, чрезъ обра-
 щеніе подобныхъ многоугольниковъ, како-
 вы были прежде составлены: то поверх-
 ность фигуры описанной къ поверхности
 вписанной будетъ имѣть удвоенное оп-
 ношеніе стороны многоугольника описан-
 наго около наибольшаго круга, къ сто-
 ронѣ многоугольника вписаннаго въ семь
 же кругъ; а самая фигура описанная къ
 фигурѣ вписанной будетъ имѣть упроен-
 ное отношеніе тѣхъ сторонъ.

Пусть будетъ шара наибольшій кругъ

ABCD; и пусть будетъ въ немъ вписанъ многоугольникъ равносторонный, коего число сторонъ дѣлимо на четыре, и около сего же круга описанъ другой многоугольникъ подобный первому, такъ чтобы многоугольника описаннаго стороны касались къ кругу въ срединѣ дугъ, описываемыхъ сторонами многоугольника вписаннаго; и пусть EG, HF будутъ два взаимно перпендикулярные поперечники круга, объемлющаго многоугольникъ описанный, и имѣющіе одинакое положеніе съ поперечниками AC, BD; и вообразимъ, что чрезъ противулежащіе углы многоугольника, протянуты діагонали, параллельныя взаимно и къ BF, HD; и еслии около неподвижнаго поперечника EG оборотимъ многоугольники: то около шара опишется фигура и въ немъ впишется другая. Надлежитъ доказать, что поверхность фигуры описанной къ поверхности вписанной имѣетъ удвоенное отношеніе прямыхъ EL къ AK; а самая фигура описанная къ вписанной имѣетъ утроенное отношеніе тѣхъ же прямыхъ.

Пусть будетъ M кругъ равный поверхности фигуры описанной около шара, а N кругъ равный поверхности фигуры

вписанной. Итакъ квадрашъ изъ радіуса круга M равенъ прямоугольнику въ EL и въ прямой равной всѣмъ діагоналямъ многоугольника описаннаго[†]; а квадрашъ изъ ^{+30.} радіуса круга N равенъ содержимому въ AK и въ прямой равной всѣмъ діагоналямъ многоугольника вписаннаго[†]. И поелику^{+25.} многоугольники подобны, то подобны и прямоугольники содержимые въ помянутыхъ прямыхъ, то естъ въ діагоналяхъ и въ сторонахъ многоугольниковъ (42); слѣдственно сущъ взаимно какъ квадраты изъ сторонъ многоугольниковъ. Но прямоугольники содержимые въ помянутыхъ прямыхъ, сущъ взаимно и какъ квадраты изъ радіусовъ круговъ M , N : по-^{*2, г.} сему поперечники круговъ M , N сущъ какъ стороны многоугольниковъ. А самые круги M , N сущъ взаимно въ удвоенномъ отношеніи поперечниковъ[†], и равны по-^{+2, XII.} верхностямъ фигуръ описанной и вписанной: посему явно, что поверхность фигуры около шара описанной, къ поверхности вписанной имѣетъ удвоенное отношеніе стороны EL къ сторонѣ AK .

Пусть еще будутъ взяты два конуса O , P такіе, чтобы конусъ O имѣлъ основаніе кругъ равный M , а конусъ P

основаніе кругъ равный N ; и чтобъ конусъ O имѣлъ высоту равную радіусу шара, а конусъ P равную перпендикуляръ, отъ центра шара къ AK проведенному.

Итакъ по доказанному, конусъ O равенъ

^{*32.} фигурѢ описанной[†], а конусъ P вписан-

^{*27.} ной[†]. И поелику многоугольники подобны;

то EL къ AK имѣеть тоже отношеніе, что радіусъ шара къ перпендикуляръ, отъ центра къ сторонѢ многоугольника проведенному: посему высота конуса O къ высотѢ конуса P имѣеть тоже отношеніе,

^{*11, v.} что EL къ AK ^{*}. Но и поперечникъ круга

M къ поперечнику круга N имѣеть тоже отношеніе, что и EL къ AK : посему поперечники оснований конусовъ O , P пропорціональны высотамъ. Слѣдственно

[✓]^{*оп. 24, XII} конусы сіи подобны^{*}: и потому конусъ O къ конусу P имѣеть упроеенное отношеніе поперечника круга M къ попереч-

^{*12, XII} нику круга N ^{*}. Итакъ явно, что фигура описанная къ фигурѢ вписанной имѣеть упроеенное отношеніе стороны EL къ сторонѢ AK .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXV.

Поверхность всякаго шара есть чешырекрапная наибольшаго его круга.

Пусть будетъ нѣкій шаръ, и наибольшаго его круга чetyрекрастный кругъ А. Говорю, что кругъ А равенъ поверхности шара.

Ибо если бы не равенъ, то или больше или меньше.

Пусть во первыхъ, поверхность шара будетъ больше круга А. И поелику суть двѣ неравныя величины, поверхность шара и кругъ А, то возможно взять двѣ неравныя прямыя такія, чтобы большая къ меньшей имѣла меньшее отношеніе, нежели поверхность шара къ кругу $A^+ \cdot +3$.

Пусть будутъ взяты такія В, С; и средняя пропорціональная между В, С пусть будетъ D. Представимъ, что шаръ разсѣченъ плоскостію чрезъ центръ, по кругу EFGH. И вообразимъ многоугольники, вписанный въ семь кругѣ и описанный около него, такіе, чтобы описанный былъ подобенъ вписанному, и чтобы сторона описаннаго къ сторонѣ вписаннаго имѣла меньшее отношеніе, нежели В, къ D*: посему удвоенное отношеніе $\dagger 4$.

сторонъ будетъ меньше удвоеннаго отношенія прямыхъ В, D*. Но удвоенное * сл. q, r. отношеніе прямыхъ В, D, есть отношеніе В къ С*; а удвоенное отношеніе спо- * опр. 10, r.

роны многоугольника описаннаго къ снору
 ронѢ вписаннаго, есть отношеніе по-
 верхности шѣла описаннаго около шара,
 +34. къ поверхности вписаннаго⁺: посему по-
 верхность фигуры описанной около шара,
 къ поверхности вписанной имѣеть мень-
 шее отношеніе, нежели поверхность шара
 къ кругу А; « такожь и премѣненіемъ, »
 что нелѣпо (32). Ибо поверхность опи-
 санной больше поверхности шара, а
 поверхность вписанной меньше поверх-
 ности круга А: поелику доказано, что
 поверхность фигуры вписанной меньше,
 нежели четырехкратный наибольшій кругъ
 +26. шара⁺; кругъ же А есть четырехкратный
 наибольшаго круга. Итакъ поверхность
 шара не больше круга А.

Говорю же, что и не меньше. Ибо,
 естли возможно, пусть будетъ меньше.
 И пусть опять найдены будутъ двѣ
 прямыя В, С такія, чтобы В къ С
 имѣла меньшее отношеніе, нежели кругъ
 +27. А къ поверхности шара⁺, а между В, С
 средняя пропорціональная D. И опять
 впиши многоугольникъ и опиши другой,
 шакіе, чтобы сторона описаннаго къ
 сторонѢ вписаннаго имѣла меньшее от-
 +4. ношеніе, нежели В къ D⁺: посему и удвоен-

ное отношеніе будетъ меньше удвоеннаго*: а посему поверхность фигуры описанной къ поверхности вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели кругъ А къ поверхности шара, что не вѣрно. Ибо поверхность описанной больше круга А, а поверхность вписанной меньше поверхности шара. И такъ поверхность шара не меньше круга А. Доказано же, что и не больше: слѣдственно поверхность шара равна кругу А, то есть четырехкратному наибольшему кругу.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVI.

Всякій шаръ есть четырехкратный конуса, имѣющаго основаніе равное наибольшему кругу шара, а высоту равную его радіусу.

Пусть будетъ нѣкій шаръ, и наибольшій его кругъ ABCD.

Буде шаръ не есть четырехкратный сказаннаго конуса, то пусть, если возможно, будетъ больше нежели четырехкратный. И пусть будетъ конусъ О, имѣющій основаніе четырехкратное круга ABCD, а высоту равную радіусу шара: посему шаръ больше конуса О. И поелику сущі двѣ неравныя величины, шаръ и конусъ:

по возможно взять двѣ неравныя прямыя
 такія, чтобы большая къ меньшей имѣ-
 ла меньшее отношеніе, нежели шаръ къ
 *3. конусу $O\Gamma$. Пусть оныя будутъ K, G . И
 пусть еще взяты будутъ I, H такія,
 чтобы разнсповала K отъ I равно какъ
 I отъ H , и какъ H отъ G (43). И воо-
 бразимъ, какъ и прежде, въ кругѣ $ABCD$
 вписанный многоугольникъ, коего число
 сторонъ дѣлимо на чешыре, и другой
 описанный, подобный вписанному, такіе,
 чтобы сторона многоугольника описан-
 наго къ сторонѣ вписаннаго имѣла мень-
 *4. шее отношеніе, нежели K къ I ; и пусть
 поперечники AC, BD будутъ взаимно
 подъ прямыми углами. Посему, естли
 около неподвижнаго поперечника AC обо-
 рошимъ плоскость многоугольниковъ: то
 въ шарѣ впишется фигура и около него
 опишется другая; и описанная къ впи-
 санной будетъ имѣть упроеенное от-
 ношеніе стороны многоугольника описан-
 наго около круга $ABCD$, къ сторонѣ въ
 34. немъ вписаннаго. Но сторона къ сторо-
 нѣ имѣетъ меньшее отношеніе, нежели
 K къ I : посему фигура описанная къ
 вписанной имѣетъ меньшее отношеніе,
 нежели упроеенное прямыя K къ I . Но K

къ G имѣеть большее отношеніе, нежели упроеенное прямыя K къ I (44), какъ явствуетъ изъ леммъ (45): а посему фигура описанная къ вписанной имѣеть меньшее отношеніе, нежели K къ G . А K къ G имѣеть меньшее отношеніе, нежели шаръ къ конусу O (46); такожь и премѣненіемъ: что невозможно. Ибо фигура описанная больше шара, а вписанная меньше конуса O : попому что конусъ O есть чепырекрапный конуса, имѣющаго основаніе равное кругу $ABCD$, а высоту равную радіусу шара, фигура же вписанная меньше нежели чепырекрапная сего же конуса. Ипакъ шаръ не больше, нежели чепырекрапный помянутого конуса.

Но пусть, еспли возможно, будетъ онъ меньше нежели чепырекрапный того конуса: посему шаръ меньше конуса O . Возьми прямыя K , G такія, чтобы K , будучи больше G , имѣла къ ней меньшее отношеніе, нежели конусъ O къ шару; и изложи шаковыя же, какъ и въ первомъ разѣ, прямыя H , I ; и вообрази вписанный многоугольникъ въ кругъ $ABCD$ и около него описанный другой, такіе, чтобы сторона описаннаго къ сторонѣ вписан-

наго имѣла меньшее отношеніе, нежели K къ I ; и пусть прочее будетъ соспроено, какъ въ первомъ случаѣ. Итакъ шѣлесная фигура описанная къ вписанной имѣетъ упроеенное отношеніе спороны многоугольника описаннаго около круга $ABCD$, къ споронѣ вписаннаго въ немъ. А спорона къ споронѣ имѣетъ меньшее отношеніе, нежели K къ I : посему фигура описанная къ вписанной будетъ имѣть меньшее отношеніе, нежели упроеенное прямая K къ I . Но K къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели упроеенное прямая K къ I (44): посему фигура описанная къ вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели и K къ G . А K къ G имѣетъ меньшее отношеніе, нежели конусъ O къ шару, что невозможно: ибо фигура вписанная меньше шара, а описанная больше конуса O . Итакъ шаръ не меньше, нежели чепырекрапный конуса, имѣющаго основаніе равное кругу $ABCD$, а высоту равную радіусу шара. Доказано же, что и не больше: слѣдственно онъ чепырекрапный.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVII.

Деказавъ сіе, явно, что всякій цилиндръ,

имѣющій основаніе наибольшій кругъ шара, а высоту равную его поперечнику, есть полупорный шара: и что поверхность его, купно съ основаніями, есть полупорная поверхности шара.

Ибо помянутый цилиндръ есть шести-
кратный конуса, имѣющаго тоже основаніе, а высоту равную радіусу шара*; а ¹⁰, XII.
шаръ, по доказанному, есть четырехкратный сего конуса†: изъ сего слѣдуетъ, что ³⁶.
цилиндръ есть полупорный шара.

Еще же, поелику поверхность цилиндра, кромѣ основаній, равна, по доказанному, кругу, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между стороною цилиндра и поперечникомъ основанія‡; и ¹⁴.
сторона сказаннаго цилиндра, какъ описаннаго около шара, равна поперечнику основанія: то слѣдуетъ, что она средняя пропорціональная равна поперечнику основанія. Но кругъ, имѣющій радіусъ равный поперечнику основанія, есть четырехкратный сего основанія, то есть четырехкратный наибольшаго круга шара: посему поверхность цилиндра, кромѣ основаній, есть четырехкратная наибольшаго круга: а посему цѣлая поверхность цилиндра, купно съ основаніями, есть шести-

крашняя наибольшаго круга. Поверхность же шара есть чепырекрашняя наибольшаго круга: ипакъ цѣлая поверхность цилиндра есть полупорная поверхности шара.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVIII.

Поверхность фігуры вписанной въ опрѣзкѣ шара, равна кругу, изъ радіуса коего квадрашъ равенъ прямоугольнику, содержимому въ сторонѣ многоугольника вписаннаго въ опрѣзкѣ наибольшаго круга, и въ прямой равной всѣмъ къ основанію параллельнымъ купно съ половиною основанія опрѣзка.

Пусть будетъ шаръ, и его опрѣзокъ, имѣющій основаніе кругъ написанный около AG . Впиши въ сечь опрѣзкѣ, какъ уже было сказано, фігуру содержимую въ коническихъ поверхностяхъ. И пусть будетъ AGH наибольшій кругъ, и $ACEHFDG$ чепносторонный многоугольникъ, кромѣ стороны AG . И возьми кругъ L , изъ коего радіуса квадрашъ равенъ прямоугольнику, содержимому въ сторонѣ AC , и во всѣхъ прямыхъ EF , CD купно съ половиною основанія, то есть съ AK . Надлежитъ доказать, что кругъ L равенъ поверхности фігуры вписанной.

Возьми кругъ М, изъ радіуса коего квадрашъ равенъ прямоугольнику, содержи-
мому въ споронѣ ЕН и въ половинѣ пря-
мой ЕF: посему кругъ М равенъ поверх-
ности конуса, коего основаніе кругъ око-
ло ЕF, а вершина почка Н⁺. Возьми также ^{+15.}
другой кругъ N, изъ радіуса коего квад-
рашъ равенъ прямоугольнику, содержи-
мому въ ЕС и въ половинѣ прямыхъ ЕF, CD⁺: ^{+17.}
то кругъ сей будетъ равенъ поверхности
конуса, которая между параллельными
плоскостями проходящими чрезъ ЕF, CD.
Возьми еще кругъ О, изъ радіуса коего
квадрашъ равенъ прямоугольнику содер-
жимому въ АС и въ половинѣ прямыхъ
CD, AG: то и сей будетъ равенъ кони-
ческой поверхности, что между парал-
лельными плоскостями проходящими чрезъ
AG, CD. Ипакъ всѣ круги будутъ равны
цѣлой поверхности фигуры; а квадрашы
изъ радіусовъ ихъ, прямоугольнику содер-
жимому въ одной споронѣ АС и въ пря-
мой равной прямымъ ЕF, CD и половинѣ
основанія, то есть АК. Но и квадрашъ
изъ радіуса круга L положенъ равнымъ
сему же прямоугольнику: посему кругъ L
равенъ кругамъ М, N, О, слѣдственно и
поверхности фигуры вписанной.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIX.

Пусть разсѣчется шаръ плоскостію не проходящею чрезъ центръ; и АЕФ будетъ наибольшій кругъ его, пресѣкающій ту сѣкущую плоскость подъ прямыми углами; и пусть въ опрѣзкѣ АВС впишется многоугольникъ, равноспоронный и чешностпоронный, кромѣ основанія АВ: то, подобно какъ и прежде, естли около неподвижнаго поперечника СЕ оборотишся многоугольникъ; углы D, E, A, B напишуть круги, коихъ поперечники DE, АВ, а спороны многоугольника напишуть коническія поверхности; и такимъ образомъ произойдетъ тѣлесная фигура, содержащая въ коническихъ поверхностяхъ, имѣющая основаніе кругъ написанный около АВ, а вершину въ точкѣ С. Сія фигура, подобно какъ и прежде, будетъ имѣть поверхность меньше поверхности опрѣзка, оную объемлющей: ибо какъ опрѣзокъ такъ и фигура имѣють края на окружности тогоже круга, написаннаго около поперечника АВ; и обѣ сіи поверхности выпуклы съ тойже спороны; и одна другою объемлется.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XL.

Поверхность фигуры вписанной въ отрѣзкѣ шара, меньше круга, коего радіусъ равенъ прямой, проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности основанія его.

Пусть будетъ шаръ, и его наибольшій кругъ АВГЕ; и пусть сего шара будетъ отрѣзокъ, имѣющій основаніе кругъ написанный около поперечника АВ; и въ отрѣзкѣ пусть вписана будетъ сказанная фигура, вписавъ въ отрѣзкѣ круга многоугольникъ, сдѣлавъ все прочее какъ прежде, и проведя въ шарѣ поперечникъ НЛ, и еще просянувъ ЛЕ, НА; и пусть будетъ М кругъ, коего радіусъ равенъ АН. Надлежитъ доказать, что кругъ М больше поверхности фигуры.

Поелику поверхность фигуры, по доказанному, равна кругу, изъ радіуса коего квадрата равенъ прямоугольнику, содержащему въ ЕН и въ ЕФ, СД, КА⁺; и дока- +38.
зано также, что прямоугольникъ содержаемый въ ЕН и въ ЕФ, СД, КА, равенъ прямоугольнику въ ЕЛ, КН⁺; прямоуголь- +23. п
никъ же въ ЕЛ, КН меньше квадрата изъ * 16, VI.
АН, ибо меньше прямоугольника въ ЛН, НК, равнаго квадрату изъ НА (47): по-

сему явно, что радіусъ круга равнаго поверхности Фигуры вписанной, меньше радіуса круга М. Слѣдовательно кругъ М больше поверхности Фигуры.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ХЛІ.

Фигура въ отрѣзкѣ вписанная, содержащая въ коническихъ поверхностяхъ, купно съ конусомъ, имѣющимъ основаніе тоже что и Фигура, а вершину въ центрѣ шара, равна конусу, имѣющему основаніе равное поверхности Фигуры, а высоту равную перпендикуляру, отъ центра шара къ сторонѣ многоугольника проведенному.

Пусть будетъ шаръ, наибольшій его кругъ, и отрѣзокъ АВС меньшій полукругія, и центръ Е; и пусть будетъ, подобно какъ и въ прежнихъ случаяхъ, вписанъ многоугольникъ чешносторонный, кромѣ АС; и чрезъ обращеніе его около неподвижной ВЕ, въ шарѣ произведена Фигура, содержащая въ коническихъ поверхностяхъ; и надъ кругомъ, коего переречникъ АС, пусть написанъ будетъ конусъ, имѣющій вершину въ центрѣ шара; и пусть будетъ конусъ К, коего основаніе равно поверхности Фигуры,

а высота равна перпендикуляру, опущенному из E къ сторонѣ многоугольника проведенному. Надлежитъ доказать, что конусъ K равенъ упомянутой фигурѣ купно съ конусомъ AEC .

На кругахъ, коихъ поперечники GH , FL , вообразимъ два конуса, имѣющіе вершину въ точкѣ E . Ипакъ, ромбоидальное тѣло $GBHE$ равно конусу, коего основаніе равно поверхности конуса GBH , а высота равна перпендикуляру, опущенному из E къ GB проведенному; оштакъ же, со-+19. держимый въ поверхности, что между параллельныхъ плоскостей проходящихъ чрезъ GH , FL , и въ коническихъ поверхностяхъ FEL , GEN , равенъ конусу, коего основаніе равно поверхности, что между параллельныхъ плоскостей проходящихъ чрезъ GH , FL , а высота равна перпендикуляру, опущенному из E къ FG проведенному; а оштакъ содержимый въ поверх-+20. ности, что между параллельныхъ плоскостей проходящихъ чрезъ FL , AC , и въ коническихъ поверхностяхъ AEC , FEL , равенъ конусу, коего основаніе равно поверхности, что между параллельныхъ плоскостей проходящихъ чрезъ FL , AC , а высота равна перпендикуляру, опущенному из E къ AC проведенному.

Е къ FA проведенному: посему всѣ сказанные конусы равны фигурѣ вписанной, и купно конусу AEC . И поелику они имѣють высоту равную перпендикуляру, опъ E къ одной изъ сторонъ многоугольника проведенному, и основанія равныя поверхности фигуры $AFGBHLC$; а и конусъ K имѣеть ту же высоту, и основаніе равное поверхности оной фигуры: посему конусъ K равенъ помянутымъ конусамъ. Помянутые же конусы равны, по доказанному, фигурѣ купно съ конусомъ AEC : чего ради конусъ K равенъ фигурѣ вписанной, и купно конусу EAC .

Отсюда явствуетъ, что конусъ, имѣющій основаніе кругъ, коего радіусъ равенъ прямой проведенной опъ вершины опрѣзка до его основанія, а высоту равную радіусу шара, есть больше фигуры вписанной, купно съ конусомъ AEC . Ибо преждесказанный конусъ больше конуса равнаго фигурѣ вписанной купно съ конусомъ, имѣющимъ тоже основаніе что и опрѣзокъ, а вершину въ центрѣ шара, то есть больше конуса, имѣющаго основаніе равное поверхности фигуры вписанной, а высоту равную перпендикуляру,

отъ центра къ сторонѣ многоугольника проведенному: поелику основаніе перваго, по доказанному, больше основанія послѣдняго⁴⁰, а высота перваго больше высоты послѣдняго.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLII.

Пусть будетъ шаръ, его наибольшій кругъ ABC , и прямая AB оппнмающая опрѣзокъ меньшій полукружія, и почка D центръ; и пусть будутъ отъ центра D до A , B пропнаны AD , DB , и описаны около произшедшаго вырѣзка многоугольникъ, а около него кругъ, то сей будетъ имѣть пошѣе центръ чпо и кругъ ABC . И ежели около неподвижнаго поперечника EK оборотимъ многоугольникъ, пока бнъ возставился шамъ откуда началось его обращеніе: то описанный кругъ перенесетъ по поверхности шара; углы многоугольника напишутъ круги, коихъ поперечники суть прямыя, параллельныя къ AB , сопрягающія углы многоугольника; почки, въ коихъ стороны многоугольника касаются къ меньшему кругу, напишутъ на меньшемъ шарѣ круги, коихъ поперечники суть прямыя, параллельныя къ AB , соединящія почки

касания; а стороны перенесутся по коническимъ поверхностямъ. Такимъ образомъ опишется фигура, содержащая въ коническихъ поверхностяхъ, коея основаніе кругъ около FG . Поверхность сказанной фигуры есть больше поверхности меньшаго опрѣзка, коего основаніе кругъ около AB .

Ибо проводи касательныя AM , BN : то оныя перенесутся по конической поверхности; фигура же произведенная обращеніемъ многоугольника $AMNELNB$ будетъ имѣть поверхность больше поверхности шароваго опрѣзка, коего основаніе кругъ около поперечника AB : поелику обѣ имѣють края на тойже плоскости, на кругѣ написанномъ около поперечника AB , и опрѣзокъ объемлется фигурою. Но поверхность конуса произведенная прямыми FM , GN , больше произведенной прямыми MA , NB : ибо прямая FM больше MA , какъ пропизулежащая прямому углу, и NG больше NB ; [а когда сіе бываетъ, то и поверхность больше поверхности (48), какъ сіе доказано въ леммахъ] Изъ сего слѣдуетъ, что поверхность описанной фигуры, больше поверхности опрѣзка меньшаго шара.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLIII.

Еще же явствуетъ, что поверхность фигуры описанной около шароваго вырѣзка (49), равна кругу, изъ радіуса коего квадрапъ равенъ прямоугольнику, содержащему въ одной изъ сторонъ многоугольника и во всѣхъ соединяющихъ его углы прямыхъ, купно съ половиною основанія сего многоугольника.

Ибо фигура описанная около вырѣзка, есть вписанная въ опрѣзкѣ большаго шара; и пошому сіе слѣдуетъ изъ вышеписаннаго†.

†38.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLIV.

Поверхность фигуры описанной около вырѣзка, больше круга, коего радіусъ равенъ прямой, проведенной отъ вершины опрѣзка до окружности основанія его.

Пусть будетъ шаръ, и его наибольшій кругъ $ADBC$, и центръ E ; и пусть будетъ описанъ около вырѣзка многоугольникъ LFK , и около него кругъ, и произведена фигура, какъ и прежде. Пусть еще будетъ кругъ N , изъ радіуса коего квадрапъ равенъ прямоугольнику, содержащему въ одной изъ сторонъ многоуголь-

ника и во всѣхъ соединяющихъ его углы прямыхъ, купно съ половиною прямой KL . И поелику сказанный прямоугольникъ равенъ, по доказанному прежде, прямо-

*23. угольнику въ MH и въ FG [†], копорая есть высота опрѣзка шара большого: то квадратъ изъ радіуса круга N равенъ прямоугольнику въ MH , GF . Но GF больше DO , копорая есть высота меньшаго опрѣзка: ибо просянувъ KF , она будетъ параллельна къ DA , а и AB параллельна къ KL , и FE есть общая: посему треугольникъ FKG подобенъ треугольнику DAO , и слѣдственно, по причинѣ что

*6, VI. FK больше AD , и FG есть больше DO *.

А MH равна поперечнику CD . Ибо соединивъ точки E , P , поелику MP равна PF

*2, VI. и HE равна EF , то EP параллельна къ MH ;

*4, VI. посему MH есть двукратная прямой EP ; а и CD есть двукратная же прямой EP , слѣдственно MH равна CD (50). Припомъ прямоугольникъ въ CD , DO равенъ квадрату изъ AD . (51). Чего ради поверхность фигуры KFL есть больше круга, коего радіусъ равенъ прямой проведенной отъ вершины опрѣзка до окружности основанія его, то есть до окружности круга написаннаго около поперечника AB :

ибо кругъ N равенъ поверхности фигуры описанной около вырѣзка.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLV.

Фигура описанная около вырѣзка, купно съ конусомъ, имѣющимъ основаніе кругъ написанный около понеречника KL , а вершину въ центрѣ шара, равна конусу, коего основаніе равно поверхности фигуры, а высота равна перпендикуляру, опущенному отъ центра къ сторонѣ многоугольника проведенному, который равенъ радіусу шара.

Ибо фигура описанная около вырѣзка, есть такожь и вписанная въ опрѣзкѣ большаго шара, коего центръ пошѣже: и пошому сіе слѣдуетъ изъ вышеписаннаго[†].

† 4г.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVI.

А изъ сего явствуетъ, что фигура описанная, купно съ конусомъ, есть больше конуса, имѣющаго основаніе кругъ, коего радіусъ равенъ прямой проведенной отъ вершины опрѣзка меньшаго шара, до окружности основанія сего опрѣзка, а высоту равную радіусу шара.

Ибо конусъ, равный описанной фигурѣ

и купно конусу, будешь имѣть основаніе $\dagger 40, \text{п } 45$. больше сказаннаго круга[†], а высоту равную радіусу меньшаго шара.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVII.

Пусть опять будетъ шаръ, и наибольшій его кругъ, и отрѣзокъ ABC меньшій полукружія, и центръ D ; и пусть въ вырѣзкѣ ABC впишется многоугольникъ чешноугольный, и около него же опишется другой подобный первому, такъ чтобы стороны къ сторонамъ были параллельны, и около описаннаго многоугольника опишется кругъ: то, подобно какъ и прежде, чрезъ обращеніе круговъ около неподвижной DB , произведущся фигуры содержимыя въ коническихъ поверхностяхъ. Надлежитъ доказать, что поверхность фигуры описанной къ поверхности фигуры вписанной имѣетъ удвоенное отношеніе стороны многоугольника описаннаго къ сторонамъ вписаннаго; а самая фигура купно^с съ конусомъ, имѣетъ утроенное отношеніе тѣхъже сторонъ.

Ибо пусть будетъ M кругъ, изъ радіуса коего квадра^т равенъ прямоугольнику, содержимому въ одной изъ сторонъ многоугольника описаннаго, и во всѣхъ сое-

диняющихъ его углы прямыхъ, купно съ половиною прямой EF : по кругу M будетъ равенъ поверхности фигуры описанной⁺; и пустьъ будетъ N другой кругъ,^{†43.} изъ радіуса коего квадрашъ равенъ прямоугольнику, содержимому въ одной изъ споронъ многоугольника вписаннаго и во всѣхъ діагоналяхъ, купно съ половиною прямой AC : по сей кругъ равенъ будетъ поверхности фигуры вписанной[†]. Но по^{†38.} мянушые прямоугольники супъ взаимно какъ квадрашы изъ EK и AL (52): посему какъ многоугольникъ къ многоугольнику, шакъ кругъ M къ кругу N ^{*}. Ишакъ явно,^{* II, V и 22, VI.} что поверхность фигуры описанной къ поверхности фигуры вписанной, имѣетъ удвоенное отношеніе прямая EK къ AL : по есть шже, что и многоугольники.

Теперь пустьъ будетъ O конусъ, имѣющій основаніе равное кругу M , а высоту равную радіусу меньшаго шара: посему сей конусъ равенъ фигурѣ описанной, купно съ конусомъ, коего основаніе кругъ около EF , а вершина въ D [†]; и пустьъ^{†45.} еще будетъ P другой конусъ, имѣющій основаніе равное кругу N , а высоту равную перпендикуляру, опъ D къ AL проведенному: посему и сей конусъ будетъ

равенъ фигурѢ вписанной, купно съ конусомъ, коего основаніе кругъ около по-
 *41. перечника AC , а вершина въ центрѢ D .
 Все сіе уже показано было. И поелику
 какъ EK къ радіусу меньшаго шара, такъ
 AL къ перпендикуляру, опъ D къ AL про-
 веденному; доказано же, что какъ EK къ AL ,
 такъ радіусъ круга M къ радіусу круга
 N (53), и такъ поперечникъ къ попе-
 речнику: посему какъ поперечникъ круга,
 который естъ основаніе конуса O , къ
 поперечнику круга, который естъ осно-
 ваніе конуса P , такъ высота конуса O
 къ высотѢ конуса P . Слѣдственно конусы
 оп. 24, XI. подобны: посему конусъ O къ конусу P
 имѣетъ упроеенное отношеніе попереч-
 12, XII. ника къ поперечнику. И такъ явно, что
 и фигура описанная, купно съ конусомъ,
 къ фигурѢ вписанной, купно съ конусомъ,
 имѣетъ упроеенное отношеніе прямыя
 EK къ AL .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVIII.

Поверхность всякаго шароваго отрѣз-
 ка, меньшаго половины шара, равна кру-
 гу, коего радіусъ равенъ прямой прове-
 денной опъ вершины отрѣзка до окруж-
 ности основанія его.

Пусть будетъ шаръ, и наибольшій его кругъ ABC , и ошрѣзокъ, меньшій полушарія, коего основаніе кругъ около AC , перпендикулярный къ кругу ABC ; и пусть будетъ F кругъ, коего радіусъ равенъ AB . Надлежитъ доказать, что поверхность ошрѣзка ABC равна кругу F .

Ибо, естли не равна, то пусть поверхность будетъ больше круга F . Возьми центръ D ; и просянувь осьъ D до A , C прямая, продолжи оныя; и по двумъ неравнымъ величинамъ, поверхности ошрѣзка и кругу F , впиши въ вырѣзкѣ ABC многоугольникъ равноспоронный и чешноугольный, и опиши около него же другой подобный первому, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели поверхность ошрѣзка шара къ кругу[†]; и чрезъ обращеніе круга ABC ,^{†6.} какъ и прежде, произведи двѣ фигуры, содержимыя въ коническихъ поверхностяхъ, одну описанную, а другую вписанную. Ишакъ поверхность фигуры описанной къ поверхности вписанной будетъ имѣть тоже отношеніе, что и многоугольникъ описанный къ вписанному: ибо и шѣ и другіе суть взаимно въ удвоенномъ отношеніи спороны многоугольника описан-

^{+47, I; II} наго къ споронѢ вписаннаго⁺. Но много-
^{* 20, VI,} угольникъ описанный къ вписанному имѢ-
 етъ меньшее отношеніе, нежели поверх-
 ность сказаннаго опрѣзка къ кругу F (54);
 и поверхность фигуры описанной боль-
^{+42.} ше поверхности опрѣзка⁺: посему поверх-
 ность фигуры вписанной больше круга F;
 что невозможно (32): ибо доказано, что
 помянутая фигуры поверхность меньше
^{+40.} круга F⁺.

Пусть еще кругъ F будетъ больше по-
 верхности. Подобнымъ образомъ опиши
 и впиши многоугольники подобные, такіе,
 чтобы описанный къ вписанному имѢлъ
 меньшее отношеніе, нежели кругъ F къ
 поверхности (55).... Итакъ поверхность
 опрѣзка не меньше круга F. Доказано
 же, что и не больше: слѣдственно равна.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLIX.

Если опрѣзокъ будетъ и больше по-
 лушарія: то подобно и его поверхность
 равна кругу, коего радіусъ равенъ пря-
 мой, проведенной отъ вершины опрѣз-
 ка до окружности его основанія.

Пусть будетъ шаръ, и наибольшій
 кругъ; и вообразимъ, что первый разсѣ-
 чень чрезъ AD плоскостію перпендику-

лярною къ другому; и пусть ошрѣзокъ ABD будетъ меньшій полушарія, и поперечникъ BC перпендикулярный къ AD ; и опъ B, C до A пропхни BA, AC . Пусть еще будетъ E кругъ, коего радіусъ равенъ AB , и F кругъ, коего радіусъ равенъ AC , и G кругъ, коего радіусъ равенъ CB .

Ипакъ кругъ G равенъ двумъ кругамъ E, F (37). Но кругъ G равенъ цѣлой поверх- *47.1. ности шара, ибо и топъ и другая чемы-рекрапны супъ круга написаннаго около поперечника BC *; и кругъ E равенъ по- +35; и *(22). верхности ошрѣзка ABD , по доказанному объ ошрѣзкѣ меньшемъ полушарія†: +48. посему остальный кругъ F равенъ поверх-ности ошрѣзка ACD , который есть большій полушарія.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ L.

Всякому вырѣзку шара равенъ конусъ, имѣющій основаніе равное поверхности шароваго ошрѣзка, копорый въ вырѣзкѣ, а высоту равную радіусу шара.

Пусть будетъ шаръ, и его наибольшій кругъ ABD , и центръ C ; и пусть будетъ конусъ, имѣющій основаніе кругъ равный поверхности что по дугѣ ABD , а высоту равную BC . Надлежитъ доказать, что

вырѣзокъ $ABCD$ равенъ помянутому конусу.

Ибо, есѣли не равенъ, то пусть вырѣзокъ будетъ больше конуса; и пусть сказанный конусъ будетъ H . И по двумъ неравнымъ величинамъ, вырѣзку и конусу H , сыщи двѣ линіи D, E , изъ коихъ D большая, такія, чтобы D къ E имѣла меньшее отношеніе, нежели вырѣзокъ къ конусу[†]. И возьми двѣ линіи F, G такія, чтобы разнѣствовала D отъ F равно какъ F отъ G , и какъ G отъ E (43); и на плоскости круга опиши около вырѣзка его многоугольникъ равносторонный и чешноугольный, и въ немъ же впиши другой сему подобный, такіе, чтобы спорона описаннаго къ споронѣ вписаннаго имѣла меньшее отношеніе, нежели D къ F [‡]; и, подобно какъ прежде, чрезъ обращеніе круга произведи двѣ фигуры содержимыя въ коническихъ поверхностяхъ. Ипакъ фигура описанная, купно съ конусомъ имѣющимъ вершину въ почкѣ C , къ вписанной, купно съ ~~нѣмъ же~~ конусомъ, имѣетъ упроеенное отношеніе спороны многоугольника описаннаго къ споронѣ вписаннаго[‡]. Но спорона описаннаго къ споронѣ вписаннаго имѣетъ меньшее отно-

шеніе, нежели D къ F : посему сказанныя тѣлесныя фигуры, описанная къ вписанной, имѣющъ меньшее отношеніе, нежели упроеенное прямая D къ F . Но D къ E имѣетъ большее отношеніе, нежели упроеенное прямая D къ F (44): посему тѣлесная фигура описанная около вырѣзка, къ фигурѣ вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели и D къ E . А D къ E имѣетъ меньшее отношеніе, нежели тѣлесный вырѣзокъ къ конусу H : посему тѣлесная фигура описанная около вырѣзка, къ фигурѣ вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели тѣлесный вырѣзокъ къ конусу H ; такожь и премѣненіемъ. Но тѣлесная фигура описанная больше вырѣзка: посему и фигура вписанная въ вырѣзкѣ больше конуса H ; что невозможно (32). Ибо доказано въ прежнихъ случаяхъ, что она меньше такового конуса, то есть, имѣющаго основаніе кругъ, коего радіусъ равенъ прямой, проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности его основанія, а высоту равную радіусу шара[†]: а таковой есть помянутый конус⁺⁴¹ H , поелику имѣетъ основаніе равное поверхности отрѣзка, то есть сказанному кругу, а высоту равную радіусу

шара. Чего ради тѣлесный вырѣзокъ не больше конуса Н.

Но пусть конусъ Н будетъ больше тѣлеснаго вырѣзка; и пусть, опять Д къ Е, изъ коихъ Д большая, имѣеть меньшее отношеніе, нежели конусъ къ вырѣзку. Возьми опять F, G такія же; и пусть сторона около плоскаго вырѣзка описаннаго чешноугольнаго многугольника, къ сторонѣ вписаннаго имѣеть меньшее отношеніе, нежели Д къ F; и около тѣлеснаго вырѣзка произведи тѣлесныя фигуры: то подобно докажемъ, что фигура описанная около тѣлеснаго вырѣзка, къ фигурѣ въ немъ вписанной имѣеть меньшее отношеніе, нежели Д къ Е, и нежели конусъ Н къ вырѣзку. Слѣдственно и вырѣзокъ къ конусу имѣеть меньшее отношеніе, нежели фигура въ тѣлесномъ вырѣзкѣ вписанная, къ фигурѣ около него описанной. Но вырѣзокъ больше фигуры въ немъ вписанной: посему конусъ Н больше фигуры описанной, что невозможно; ибо доказано, что таковой конусъ меньше фигуры описанной около вырѣзка. Итакъ вырѣзокъ равенъ конусу Н. (56).

АРХИМЕДА

О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ.

К Н И Г А II.

Архимедъ Досиѡея привѣществуешь!

Ты просилъ меня написать доказательствъ задачамъ, коихъ предложенія послалъ я къ Конону. Большая часть оныхъ произтекаетъ изъ теоремъ, коихъ доказательствъ уже посланы къ тебѣ, какова, на примѣръ, слѣдующая: Поверхность всякаго шара есть чешырекрапная наибольшаго его круга; или сія: Поверхность всякаго шароваго опрѣзка равна кругу, коего радіусъ равенъ прямой, проведенной отъ вершины опрѣзка до окружности его основанія; или еще: Всякій цилиндръ, имѣющій основаніе наибольшій кругъ шара, а высоту равную его поперечнику, величиною есть полу-

шорный шара, и поверхностію также есть полупорный поверхности шара; или и слѣдующая: Всякій тѣлесный вырѣзокъ равенъ конусу, имѣющему основаніе кругъ равный поверхности шароваго отрѣзка, который въ вырѣзкѣ, а высоту равную радіусу шара. Въ книгѣ, которую къ тебѣ препровождаю, ты найдешь всѣ теоремы и задачи, изъ тѣхъ теоремъ произтекающія. Что же касается до нахожимыхъ изъ другихъ основаній, кои относятся къ спиралямъ и коноидамъ, то я постараюсь прислать оныя къ тебѣ сколько возможно скорѣе.

Первая изъ задачъ была слѣдующая:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

По данному шару, найди плоское пространство, равное поверхности онаго шара.

Сіе явствуетъ, какъ слѣдствіе одной изъ вышесказанныхъ теоремъ: ибо четырехкратный наибольшій кругъ шара, есть плоское пространство, и припомъ равное 35, т. поверхности шара¹.

Вторая же была сія:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

По данному конусу или цилиндру, най-
ти шаръ, равный сему конусу или ци-
линдру.

Пусть будетъ А данный конусъ или
цилиндръ, и ему равный шаръ В; и пусть
будетъ цилиндръ CFD полупорный ци-
линдра или конуса А (57), и другой ци-
линдръ, полупорный шара В, коего осно-
ваніе кругъ около поперечника ГН, а
ось KL равная поперечнику шара[†]. Ишакъ^{+37, г.}
цилиндръ Е равенъ цилиндру К. А рав-
ныхъ цилиндровъ основанія обратно про-
порціональны высотамъ: посему какъ
кругъ Е къ кругу К, шо есть квадра-
тъ изъ CD къ квадрату изъ ГН, такъ KL
къ EF. Но KL равна ГН, ибо цилиндръ
полупорный шара, имѣетъ ось равную
его поперечнику[†]; и К есть наибольшій^{+37, г.}
кругъ шара: посему какъ квадра-
тъ изъ CD къ квадрату изъ ГН, такъ ГН къ EF.
Пусть квадрату изъ ГН будетъ равенъ
прямоугольникъ въ CD, MN: посему какъ
CD къ MN, такъ квадра-
тъ изъ CD къ квад-
рату изъ ГН*, шо есть, такъ ГН къ * сл. 2: 26,
EF*; и премѣненіемъ (58), какъ CD къ ГН, * 11, г.

такъ GH къ MN , и такъ MN къ EF . Но каждая изъ прямыхъ CD , EF дана: посему данныя суть между CD , EF двѣ среднія пропорціональныя GH , MN ; чего ради и каждая изъ прямыхъ GH , MN есть данная (59).

Задача сія построится слѣдующимъ образомъ: Пусть будетъ A данный конусъ или цилиндръ. Надлежитъ найти шаръ, равный конусу или цилиндру A .

Пусть будетъ конуса или цилиндра A полуторный цилиндръ, коего основаніе кругъ около поперечника CD , а ось EF . (57). Между CD , EF возьми двѣ среднія пропорціональныя GH , MN , такъ чтобъ было, какъ CD къ GH , такъ GH къ MN , и такъ MN къ EF (60); и вообрази цилиндръ, коего основаніе кругъ около поперечника GH , а ось KL равная поперечнику GH . Говорю, что цилиндръ E равенъ цилиндру K .

Поелику какъ CD къ GH , такъ MN къ EF ; премѣненіемъ же и по причинѣ что GH равна KL , какъ CD къ MN (61), то есть какъ квадратъ изъ CD къ квадрату изъ GH , такъ кругъ E къ кругу K : посему какъ кругъ E къ кругу K , такъ KL къ EF . Чего ради основанія E , K цилиндровъ суть обратно пропорціональ-

ны высопамъ: и потому цилиндръ Е равенъ цилиндру К. Но цилиндръ К есть *15, XII. полушпорный шара, коего поперечникъ ГН: посему шаръ, коего поперечникъ равенъ ГН, то есть шаръ В, равенъ конусу или цилиндру А.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Всякому отрѣзку шара равенъ конусъ, имѣющій поже съ отрѣзкомъ основаніе, а высоту такую прямую, копорая къ высотѣ отрѣзка имѣетъ поже отношеніе, что радіусъ шара купно съ высотой остальнаго отрѣзка, къ высотѣ сего отрѣзка.

Пусть будетъ шаръ, и его наибольшій кругъ, имѣющій поперечникъ АС; и пусть шаръ чрезъ ВГ разсѣкается плоскостію перпендикулярною къ АС, и центръ его будетъ Н; и сдѣлаемъ, какъ НА, АЕ къ АЕ, такъ ДЕ къ СЕ; и еще *12, VI. сдѣлаемъ, какъ НС, СЕ къ СЕ, такъ КЕ къ ЕА; и надъ кругомъ что около поперечника ВГ, напишемъ два конуса, имѣющіе вершины въ точкахъ К, D. Говорю, что конусъ ВDГ равенъ шаровому отрѣзку, который со стороны С, а конусъ ВКГ тому, который со стороны почки А.

Пропяни BH , HF ; и вообрази конусъ, имѣющій основаніе кругъ, что около поперечника BF , а вершину въ точкѣ H . Пусть будетъ еще конусъ M , имѣющій основаніе, равное поверхности шароваго отрѣзка BFC , то есть кругъ, коего радіусъ равенъ прямой BC , а высоту равную радіусу шара: посему конусъ M равенъ шѣлесному вырѣзку $BCHF$, по до-

+50, I. казанному въ первой книгѣ¹. И поелику какъ DE къ EC , такъ HA , AE къ AE : то будетъ, ошдѣленіемъ, какъ CD къ CE ,

*17, V. такъ HA къ AE *, то есть такъ CH къ AE ; а прсмѣненіемъ, какъ CD къ CH , такъ

*16, V. CE къ EA *; и совокупленіемъ, какъ HD

*18, V. къ HC , такъ CA къ AE *, то есть такъ квадрашъ изъ CB къ квадрату изъ BE (62).

Чего ради какъ DN къ CH , такъ квадрашъ изъ CB къ квадрату изъ BE . Но CB равна радіусу круга M , а BE есть радіусъ

~~шару~~ круга, что около поперечника BF *: посему какъ DN къ HC , такъ кругъ M къ кру-

*17, I. $\sqrt{\quad}$ гу что около поперечника BF *. Но HC равна оси конуса M : посему какъ DN къ оси конуса M , такъ кругъ M къ кругу около поперечника BF : чего ради конусъ, имѣющій основаніе кругъ M , а высоту радіусъ шара, равенъ шѣлесному ромбу $BDFH$,

по доказанному въ леммахъ первой книги*. ^{2-я 17, I.}

Или и такъ: Поелику какъ DH къ высотѣ конуса M , такъ кругъ M къ кругу около поперечника BF : то конусъ M равенъ конусу, коего основаніе кругъ около поперечника BF , а высота DH ; ибо основанія ихъ обращно пропорціональны высотамъ. Но конусъ, имѣющій основаніе кругъ около поперечника BF , а высоту DH , равенъ шѣлесному ромбу $BDFH$: посему и конусъ M равенъ шѣлесному ромбу $BDFH$. Конусъ же M равенъ и шѣлесному вырѣзку $BCFH$: посему и вырѣзокъ $BCFH$ равенъ шѣлесному ромбу $BDFH$. Итакъ, по отнятіи общаго конуса, коего основаніе кругъ около поперечника BF , а высота EH , будетъ оспальной конусъ BDF равенъ шаровому опрѣзку BFC .

Подобно докажется, что и конусъ BKF равенъ шаровому опрѣзку BAF . И дѣйствительно, поелику какъ HC , CE къ CE , такъ KE къ EA : то отдѣленіемъ, какъ KA къ AE , такъ HC къ CE . Но HC равна HA : посему, и премѣненіемъ, какъ KA къ AN , такъ AE къ EC ; слѣдственно совокупленіемъ, какъ KN къ HA , такъ AC къ CE , то есть такъ квадраты изъ BA къ квадрату изъ BE . Изложи еще кругъ N , имѣю-

щій радіусъ равный AB , то кругъ N равенъ будещъ поверхности отрѣзка BAF ; и вообрази конусъ N , имѣющій высоту равную радіусу шара, то сей конусъ будещъ равенъ шѣлесному вырѣзку $BHFA$: то и другое, по доказанному въ первой +49 и 50, I. книгѣ*. И поелику доказано, что какъ KN къ HA , такъ квадрапъ изъ AB къ квадрапу изъ BE , то есть такъ квадрапъ изъ радіуса круга N къ квадрапу изъ радіуса круга, что около поперечника BF , то есть такъ кругъ N къ кругу около поперечника BF *; и $АН$ равна *15, V. и 2, XII. высотѣ конуса N : посему какъ KN къ высотѣ конуса N , такъ кругъ N къ кругу около поперечника BF ; чего ради конусъ N (63), то есть вырѣзокъ $BHFA$, равенъ фигурѣ $BHFK$. Придай обще конусъ, коего основаніе кругъ около поперечника BF , а высота $ЕН$: посему цѣлый шаровый отрѣзокъ ABF равенъ конусу BFK . Что и доказать надлежало.

Отсюда явствуетъ, что вообще какъ отрѣзокъ шара къ конусу, имѣющему тоже основаніе и ту же высоту, что отрѣзокъ, такъ радіусъ шара купно съ высотой остальнаго отрѣзка, къ высо-

иѢ сего опрѣзка: ибо какъ DE къ EC , такъ конусъ DFB , то есть опрѣзокъ BFC , къ конусу BCF .

Предположивъ иѢже условія, мы иначе докажемъ, что конусъ KBF равенъ шаровому опрѣзку AFB . Пусть будетъ конусъ N , имѣющій основаніе равное поверхности шара, а высоту равную радиусу. Итакъ сей конусъ равенъ шару: ибо шаръ, по доказанному, есть чепырекрапшый конуса, имѣющаго основаніе наибольшій кругъ шара, а высоту его радиусъ; а и конусъ N есть чепырекрапш-+36, г.
ный сказаннаго конуса, потому что основаніе есть чепырекрапное основанія, равно какъ и поверхность шара чепырекрапна наибольшаго его круга. И по-+35, г.
елику какъ HA , AE къ AE , такъ DE къ EC ; то опдѣленіемъ и премѣненіемъ, какъ HC къ CD , такъ AE къ EC . Еще же, поелику какъ KE къ EA , такъ HC , CE къ CE ; то опдѣленіемъ и премѣненіемъ, какъ KA къ CH то есть HA , такъ AE къ EC *, то есть HC къ CD , также *17 и 16, г.
и совокупленіемъ. Но AN равна HC : поему какъ KN къ HC , такъ ND къ DC ; и какъ цѣлая KD къ DN , такъ DN къ DC *, то *16 и 18, г.

есть такъ $КН$ къ $НА$. Чего ради прямоугольникъ въ $ДН$, $НК$ равенъ прямоугольнику въ $ДК$, $НА$ *. Еще же, поелику какъ $КН$ къ $НС$, такъ $НД$ къ $СД$; по применіемъ, какъ $КН$ къ $НД$, такъ $НС$ къ $СД$. А какъ $НС$ къ $СД$, такъ, по доказанному, $АЕ$ къ $ЕС$: посему какъ $КН$ къ $НД$, такъ $АЕ$ къ $ЕС$; а посему какъ квадрашъ изъ $КД$ къ прямоугольнику въ $КН$, $НД$, такъ квадрашъ изъ $АС$ къ прямоугольнику въ $АЕ$, $ЕС$ (64). Доказано же, что прямоугольникъ въ $КН$, $НД$ равенъ прямоугольнику въ $КД$, $АН$: посему какъ квадрашъ изъ $КД$ къ прямоугольнику въ $КД$, $АН$, то есть какъ $КД$ къ $АН$ *, такъ квадрашъ изъ $АС$ къ прямоугольнику въ $АЕ$, $ЕС$, то есть къ квадрашу изъ $ЕВ$ *. Но $АС$ равна радіусу круга N : посему какъ квадрашъ изъ радіуса круга N къ квадрашу изъ $ВЕ$, то есть какъ кругъ N къ кругу около поперечника $ВФ$, такъ $КД$ къ $АН$, то есть такъ $КД$ къ высотѣ конуса N . Чего ради конусъ N , то есть шаръ, равенъ шѣлесному ромбу $ВДФК$ *. Или и такъ: Посему какъ кругъ N къ кругу около поперечника $ВФ$, такъ прямая $КД$ къ высотѣ конуса N : чего ради конусъ N равенъ конусу, коего основаніе кругъ около по-

перечника BF , а высота DK , ибо основанія ихъ обратно пропорціональны высотамъ. Но сей конусъ равенъ тѣлесному ромбу $BKFD$ *: посему и конусъ N , то есть *14, XII. шаръ, равенъ тѣлесному ромбу $BKFD$, составленному изъ конусовъ BDF , BKF .—Изъ нихъ конусъ BDF равенъ, по доказанному, шаровому опрѣзку BCF : посему остальной конусъ BKF равенъ шаровому опрѣзку BAF .

Третья задача была слѣдующая:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Раздѣлить данный шаръ плоскостію такъ, чтобы поверхности опрѣзковъ имѣли взаимно данное отношеніе.

Положимъ, что сіе сдѣлано. И пусть будетъ шара наибольшій кругъ $ADBE$, и его поперечникъ AB , и проведена будетъ плоскость перпендикулярная къ AB ; и пусть сія плоскость сдѣлаетъ на кругѣ $ADBE$ сѣченіе DE ; и пусть прошиянуты будутъ AD , BD .

Поскольку отношеніе поверхности опрѣзка DAE къ поверхности опрѣзка DBE дано: поверхность же опрѣзка DAE равна кругу, коего радіусъ равенъ AD *, *49, I.

а поверхность опрѣзка DBE кругу, коего
 *48, I. радиусъ равенъ DB⁺; и сказанные круги
 суть взаимно какъ квадрапъ изъ AD къ
 *15, VI
 2, XII. квадрапу изъ DB', то есть какъ AC къ CB
 (65): посему отношеніе AC къ CB дано,
 слѣдовательно и почка C есть данная.
 А поелику къ АВ перпендикулярна DE:
 посему и плоскость чрезъ DE проходящая,
 есть положеніемъ данная.

Задача сія поспроишся такъ: Пусть бу-
 деть шаръ, коего наибольшій кругъ ADBE,
 и поперечникъ АВ; и пусть данное от-
 ношеніе будетъ отношеніе F къ G. Раз-
 сѣки прямую АВ въ почкѣ С такъ, чѣтобъ
 VI 19 было AC къ CB, какъ F къ G^{*}; и чрезъ
 С разсѣки шаръ плоскостію перпендику-
 лярною къ АВ, и пусть взаимное сѣченіе
 будетъ DE; и просяни AD, DB; и из-
 ложи два круга Н, К, одинъ, имѣющій
 радиусъ равный AD, а другой, равный
 DB. Итакъ кругъ Н равенъ поверхности
 опрѣзка DAE, и кругъ К поверхности
 опрѣзка DBE: по доказанному въ первой
 *48 и 49, I. книгѣ[†]. И поелику уголъ ADB данный, и
 CD перпендикулярная: то какъ AC къ CB, (VI)
 19, 31) то есть какъ F къ G, такъ квадрапъ "2
 изъ AD къ квадрапу изъ DB, то есть

такъ квадрапъ изъ радіуса круга Н къ квадрапу изъ радіуса круга К, то есть такъ кругъ Н къ кругу К, то есть такъ поверхность шароваго опрѣзка DAE къ поверхности опрѣзка DBE.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Раздѣлимъ данный шаръ такъ, чтобы опрѣзки его взаимно имѣли данное отношеніе.

Пусть будетъ данъ шаръ ABCD. Надлежитъ разсѣчь оный плоскостію такъ, чтобы опрѣзки взаимно имѣли данное отношеніе.

Пусть онъ будетъ разсѣченъ чрезъ AC плоскостію: то отношеніе шароваго опрѣзка ADC къ опрѣзку ABC будетъ данное. Разсѣки еще сей шаръ чрезъ центръ, и пусть будетъ сѣченіе наибольшій кругъ ABCD, его центръ К, а поперечникъ DB; и сдѣлай, какъ DK, DX, къ DX, такъ RX къ XB, а какъ KB, BX къ BX, такъ LX къ XD; и пропяти AL, LC, AR, RC. И такъ конусъ ALC равенъ шаровому опрѣзку ADC, а конусъ ARC опрѣзку ABC: слѣдственно отношеніе конуса ALC къ конусу ARC будетъ данное. Но какъ конусъ къ конусу, такъ LX къ

XR, ибо имѣющъ поже основаніе, кругъ около поперечника AC: посему и отношеніе LX къ XR есть данное. Сверхъ того,

*взз. по прежнему изъ спроенія будетъ, какъ LD къ KD, такъ KB къ BR, и такъ DX къ XB (66). И поелику какъ RB къ BK, такъ KD къ LD; то совокупленіемъ, какъ RK къ KB, то есть къ KD, такъ KL къ LD: посему какъ цѣлая RL къ цѣлой KL,

16и18, V. такъ KL къ LD. Чего ради прямоугольникъ въ RL, LD равенъ квадрату изъ KL; и поному какъ RL къ LD, такъ квадратъ изъ KL къ квадрату изъ LD. И поелику какъ LD къ DK, такъ DX къ XB; предложениемъ же и совокупленіемъ, какъ KL къ LD, такъ BD къ DX: посему и какъ квадратъ изъ KL къ квадрату изъ LD, такъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ DX*.

*22, VI. Еще же, поелику какъ LX къ DX, такъ KB, BX къ BX: то отдѣленіемъ, какъ LD къ DX, такъ KB къ BX. Положи прямой KB равную BF; то явно, что она упадетъ далѣ точки R (67), и будетъ, какъ LD къ DX, такъ FB къ BX: посему (68) какъ DL къ LX, такъ BF къ FX. Поелику же отношеніе DL къ LX есть данное, равно и RL къ LX: то отношеніе RL къ LD будетъ данное (69). И такъ,

поелику отношеніе RL къ LX есть сло-
 женное изъ отношенія RL къ LD , и оп-
 ношенія DL къ LX^* ; но какъ RL къ LD , * (45), v.
 такъ квадрашь изъ DB къ квадрашу изъ
 DX (70), а какъ DL къ LX , такъ BF
 къ FX : посему отношеніе RL къ LX есть
 сложенное изъ отношенія квадрата изъ
 BD къ квадрашу изъ DX , и отношенія
 BF къ FX^* . Сдѣлай, какъ RL къ LX , такъ * 1, v.
 BF къ FN . (71). И поелику отношеніе
 RL къ LX дано, то и отношеніе FB къ
 FN дано; но BF дана, ибо она равна ра-
 діусу, посему и FN есть данная. Посему
 покажь*, отношеніе BF къ FN есть сло- * 11, v.
 женное изъ отношенія квадрата изъ BD къ
 квадрашу изъ DX , и отношенія BF къ
 FX . Но отношеніе BF къ FN есть также
 сложенное изъ отношенія BF къ FX и
 отношенія FX къ FN^* . Опними общее оп- * (45), v.
 ношеніе BF къ FX : посему въ остальныхъ
 будетъ, какъ квадрашь изъ BD , то есть
 данный, къ квадрашу изъ DX , такъ XF
 къ FN , то есть къ данному. Но и FD
 дана: и потому должно разсѣчь данную
 прямую DF въ точкѣ X , сдѣлавъ какъ
 XF къ данной FN , такъ данный квадрашь
 изъ BD къ квадрашу изъ DX . Говоря во-
 обще, сіе можетъ быть рѣшено; но

если введем найденныя условія, то есть, что DB есть двукратная прямой BF и что BF больше FN , то не можетъ быть никакого рѣшенія. Ипакъ вопросъ сей долженъ выразиться слѣдующимъ образомъ: По даннымъ двумъ прямымъ DB , BF , изъ коихъ DB двукратная прямой BF , и по данной на BF точкѣ N , разсѣчь прямую DB въ точкѣ X , сдѣлавъ, какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ DX , такъ XF къ FN ; что мы на концѣ сего сочиненія рѣшимъ какъ аналитически, такъ и синтетически (72).

Задача сія построится такъ: Пусть данное отношеніе будетъ, прямой Q къ прямой S , большей къ меньшей; и пусть данъ будетъ шаръ; и пусть онъ разсѣчется плоскостію чрезъ центръ, и сѣченіе будетъ кругъ $ABCD$, коего поперечникъ BD , а центръ K . Положи BF равную KB ; и разсѣки BF въ точкѣ N такъ, чтобы была NF къ NB , какъ Q къ S ; и разсѣки еще BD въ точкѣ X такъ, чтобы было XF къ NF , какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ DX ; и чрезъ X проводи плоскость перпендикулярную къ BD . Говорю, что она разсѣ-

чешъ шаръ такъ, что большій опрѣзокъ
будетъ къ меньшему, какъ Q къ S.

Сдѣлай, какъ KB, BX къ BX, такъ LX
къ DX, и какъ KD, DX къ DX, такъ RX къ
XB; и пропяти AL, LC, AR, RC. И такъ изъ
строенія будетъ, по доказанному ана-
литически, прямоугольникъ въ RL, LD
равенъ квадрату изъ LK, и какъ KL къ LD,
такъ BD къ DX: посему и какъ квадраты
изъ KL къ квадрату изъ LD, такъ квад-
ратъ изъ BD къ квадрату изъ DX. И по-
елику прямоугольникъ въ RL, LD равенъ
квадрату изъ LK: то какъ RL къ LD,
такъ квадраты изъ LK къ квадрату изъ
LD*; посему и какъ RL къ LD, такъ квад- *сл: 2, 20, VI.
ратъ изъ BD къ квадрату изъ DX*, то *II, V.
есть такъ XF къ FH. И поелику какъ
KB, BX къ BX, такъ LX къ DX, и KB
равна BF: то будетъ, какъ FX къ XB,
такъ LX къ DX; и обращеніемъ, какъ
XF къ FB, такъ XL къ LD*: чего ради и *сл: 19, V.
какъ LD къ LX, такъ BF къ FX*. И поелику *сл: 4, V.
какъ RL къ LD, такъ XF къ FH; и какъ
DL къ LX, такъ BF къ FX: то равно-
мѣстно въ обратной пропорціи, какъ
RL къ LX, такъ BF къ FH*; а посему *23, V.
какъ LX къ XR, такъ FH къ HB*. Но какъ *I, 17 и сл: 4, V
FH къ HB, такъ Q къ S: чего ради и какъ

- *11. LX къ XR*, то есть какъ конусъ ACL къ
 14. XII. конусу ARC, то есть какъ шаровый опрѣзокъ ADC къ опрѣзку ABC, такъ Q къ S.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Соспавивъ опрѣзокъ шара, подобный данному и равный другому данному.

Пусть будутъ ABC, EFG два данные шаровые опрѣзки; и пусть основаніе опрѣзка ABC будетъ кругъ около поперечника AB, а вершина въ шпчкѣ C; основаніе же опрѣзка EFG будетъ кругъ около поперечника EF, а вершина въ шпчкѣ G. Надлежитъ найсти опрѣзокъ, равный опрѣзку ABC, а подобный опрѣзку EFG.

Положимъ, что найденъ: и пусть будетъ сей опрѣзокъ HKL, его основаніе кругъ около поперечника HK, а вершина въ шпчкѣ L; и пусть еще на сихъ шарахъ будутъ круги ANBC, HOKL, EPFG, коихъ поперечники CN, LO, GP перпендикулярны къ основаніямъ опрѣзковъ, а центры ихъ шпчки Q, R, S. Сдѣлай какъ QN, NT къ NT, такъ XT къ TC; и какъ RO, OU къ OU, такъ UY къ UL; и еще какъ SP, PV къ PV, такъ ZV къ VG; и вообрази конусы, коихъ основанія круги около поперечниковъ AB, HK, EF, а вершины въ

почкахъ X, Y, Z . Ишакъ конусъ ABX равенъ шаровому отрѣзку ABC , а конусъ YHK шаровому отрѣзку HKL , а конусъ EZF отрѣзку EGF : по доказанному*. И ^{13.} поелику шаровый отрѣзокъ ABC равенъ отрѣзку HKL : то и конусъ AXB равенъ конусу YHK . А равныхъ конусовъ основанія обратно пропорціональны высотамъ*: по ^{15, XII.} сему, какъ кругъ около поперечника AB къ кругу около поперечника HK , такъ YU къ XT . Но какъ кругъ къ кругу, такъ квадраты изъ AB къ квадрату изъ HK : посему какъ квадраты изъ AB къ квадрату изъ HK , такъ YU къ XT . Поелику же отрѣзокъ EF подобенъ отрѣзку HK ; то докажется, что и конусъ EFZ подобенъ конусу YHK (73): посему какъ ZV къ EF , такъ YU къ HK *. И какъ отношеніе ZV ^{опр. 24, XI} къ EF дано (74): посему и отношеніе YU къ HK есть данное. Пусть оно будетъ тоже съ отношеніемъ XT къ D : то, поелику XT дана, и D есть данная; и при томъ будетъ какъ YU къ XT , то есть какъ квадраты изъ AB къ квадрату изъ HK , такъ HK къ D *. Положи квадра- ^{16, I.} ту изъ HK равный прямоугольникъ въ AB , W ; посему какъ квадраты изъ AB къ квадрату изъ HK , такъ AB къ W *. ^{сл. 2: 20, VI}

Доказано же, что какъ квадрапъ изъ АВ къ квадрапу изъ НК, такъ НК къ D: посему, и премѣненіемъ, какъ АВ къ НК, такъ W къ D*. Но какъ АВ къ НК, такъ НК къ W, ибо квадрапъ изъ НК равенъ прямоугольнику въ АВ, W: чего ради какъ АВ къ НК, такъ НК къ W, и такъ W къ D. И такъ НК, W суть двѣ среднія непрерывно пропорціональныя между АВ, D.

Задача сія построится такъ: Пусть будутъ ABC EFG два отрѣзка: ABC топь, коему надлежитъ составить равный, а EFG коему подобный; и пусть будутъ шаровъ наибольшіе круги ACBN, GEPF, ихъ поперечники CN, GP, а центры Q, S. Сдѣлай, какъ QN, NT къ NT, такъ XT къ TC, и какъ SP, PV къ PV, такъ ZV къ VG: посему конусъ XAB равенъ шаровому отрѣзку ABC, а конусъ FZE отрѣзку *3. EGF*. Сдѣлай еще, какъ ZV къ EF, такъ XT къ D; и между двухъ данныхъ прямыхъ АВ, D возьми двѣ среднія непрерывно пропорціональныя НК, W, то есть чтобы было, какъ АВ къ НК, такъ НК къ W, и такъ W къ D; и на НК составь круговой отрѣзокъ НКL подобный отрѣзку *33. III. EFG*; и дополни кругъ, и пусть его по-

перечникъ будеть LO ; и вообрази шаръ, коего наибольшій кругъ былъ бы $LHOK$, а центръ R ; и чрезъ HK проводи плоскость перпендикулярную къ LO . Ишакъ шаровый опрѣзокъ, что со стороны L , подобенъ шаровому опрѣзку EFG , ибо круговые опрѣзки подобны*. Говорю еще, *оп. II, III. что онъ равенъ опрѣзку ABC . Ибо сдѣлай, какъ RO , OU къ OU , такъ YU къ UL : посему конусъ YHK равенъ шаровому опрѣзку NKL †. Поелику же конусъ YHK подобенъ конусу FZE : то какъ ZV къ EF , то естъ какъ XT къ D *, такъ YU къ NK ; *II, V. посему, премѣненіемъ и преложеніемъ, какъ YU къ XT , такъ NK къ D . И поелику прямая AB , KN , W , D суть взаимно пропорціональныя; то какъ квадрасть изъ AB къ квадрату изъ NK , такъ NK къ D †. Но *сл. 2: 20, VI и 16, V. какъ NK къ D , такъ YU къ XT : посему какъ квадрасть изъ AB къ квадрату изъ KN , то естъ какъ кругъ около поперечника AB къ кругу около поперечника NK *, такъ YU къ XT †. Чего ради конусъ *2, XII. XAB равенъ конусу YHK †: слѣдовательно *15, XII. и шаровый опрѣзокъ ABC равенъ опрѣзку NKL . Ишакъ сосшавленъ опрѣзокъ NKL , равный опрѣзку данному ABC и подобный другому данному EFG .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

По даннымъ двумъ опрѣзкамъ шогоже или различныхъ шаровъ, найди шаровый опрѣзокъ, подобный одному изъ данныхъ, а поверхность имѣющій равную поверхность другого.

Пусть будутъ данные шаровые опрѣзки по дугамъ ABC , DEF ; и пусть, который по дугѣ ABC , будетъ топъ, коему искомый долженъ быть подобенъ, а по дугѣ DEF топъ, коего поверхности искомый долженъ быть равенъ. Положимъ, что сіе сдѣлано: и пусть будетъ шаровый опрѣзокъ KLM подобенъ опрѣзку ABC , а поверхностью равенъ поверхности опрѣзка DEF . Вообрази центры шаровъ, и чрезъ центры проводи плоскости перпендикулярныя къ основаніямъ опрѣзковъ; и пусть будутъ сѣченія шаровъ, наибольшіе круги $KLMN$, $BAHC$, $EFGD$, а основанія опрѣзковъ, прямыя KM , AC , DF ; и пусть поперечники шаровъ, перпендикулярные къ KM , AC , DF , будутъ LN , BH , EG ; и протяни LM , BC , EF .

Поелику поверхность шароваго опрѣзка KLM равна поверхности опрѣзка DEF ; то и кругъ, имѣющій радіусъ

равный ML , равенъ кругу, имѣющему радиусъ равный EF , ибо поверхность каждаго изъ помянутыхъ опрѣзковъ равна, по доказанному, кругу, коего радиусъ равенъ прямой проведенной отъ вершины опрѣзка до окружности его основанія[†]: ^{+48 и 49, I.} слѣдственно и ML равна EF . Поелику же опрѣзокъ KLM подобенъ опрѣзку ABC ; то какъ RL къ RN , такъ BQ къ QH (75); и, предложениемъ и совокуплениемъ, какъ NL къ LR , такъ NB къ BQ ^{*}. Но какъ RL ^{*сл: 4, п 18, V.} къ LM , такъ BQ къ CB , по подобію треугольниковъ LMR , BCQ ^{*}: посему какъ NL ^{*4, VI.} къ LM , то есть къ EF , такъ NB къ BC ^{*}; и ^{*22, V.} применениемъ. И поелику отношеніе EF къ BC есть данное, ибо каждая изъ сихъ прямыхъ дана; то и отношеніе LN къ BN будетъ данное; но прямая BN данная, посему и LN данная, слѣдовательно и шаръ есть данный.

Задача сія построится такъ: Пусть будутъ ABC , DEF данные два шаровые опрѣзка: ABC тотъ, коему искомый долженъ быть подобенъ, а DEF тотъ, коего поверхности онъ долженъ имѣть равную поверхность. Учини то же строеніе, что и въ аналитическомъ рѣшеніи;

и сдѣлай какъ BC къ EF , такъ BH къ NL ; и около поперечника NL напиши кругъ; и вообрази шаръ, коего наибольшій кругъ былъ бы $LKNM$; и разсѣки NL въ R , чтобъ было, какъ HQ къ QB , такъ NR къ RL ; и чрезъ R разсѣки поверхность шара плоскостію перпендикулярною къ LN ; и просяни LM . Ипакъ круговые опрѣзки чпо на KM , AC суть подобные (76); посему и шаровые опрѣзки подобны. И поелику, въ слѣдствіе разсѣченія, какъ

*18, v. NB къ BQ , такъ NL къ LR *; а какъ QB

*4, vi. къ BC , такъ RL къ LM *: посему какъ NB

*22, и 16, v. къ NL , такъ BC къ LM *: Но и какъ NB къ NL , такъ BC къ EF : чего ради EF

*11 и 9, v. равна LM *; посему и кругъ, коего радіусъ EF , равенъ кругу, коего радіусъ LM . Но кругъ, коего радіусъ EF , равенъ опрѣзку DEF , и кругъ, коего радіусъ LM равенъ опрѣзку KLM , какъ доказано въ первой

48 и 49, i. книгѣ: посему поверхность шаровато опрѣзка KLM равна поверхности опрѣзка DEF . Припомъ опрѣзокъ KLM подобенъ опрѣзку ABC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Отъ даннаго шара отсѣчь плоскостію опрѣзокъ, такъ чтобы сей опрѣзокъ къ

конусу, имѣющему съ нимъ тоже основаніе и ту же высоту; имѣлъ данное отношеніе.

Пусть будетъ данъ шаръ, коего наибольшій кругъ $ABCD$, и поперечникъ BD . Надлежитъ разсѣчь шаръ плоскостію чрезъ AC такъ, чтобы шаровый отрѣзокъ ABC къ конусу ABC имѣлъ отношеніе данное.

Положимъ, что сіе сдѣлано: и пусть будетъ E центръ шара; и какъ ED , DF къ DF , такъ GF къ FB . И такъ конусъ ACG равенъ отрѣзку ABC [†]. Припомъ от-^{†3.}ношеніе конуса ACG къ конусу ABC будетъ данное; а посему и отношеніе GF къ FB есть данное. Но какъ GF къ FB , такъ ED , DF къ DF : посему данное будетъ отношеніе ED , DF къ DF , слѣдственно и отношеніе ED къ DF : а посему DF есть данная, слѣдовательно также и AC (77). И поелику ED , DF къ DF имѣетъ большее отношеніе, нежели ED , DB къ DB (78); но ED , DB равны тремъ ED , а DB равна двумъ ED : посему ED , DF къ DF имѣетъ большее отношеніе, нежели при къ двумъ. Но отношеніе ED , DF къ DF есть тоже съ отношеніемъ даннымъ: а посему, дабы строеніе было

возможно, надлежитъ данному отношенію бытъ больше отношенія трехъ къ двумъ.

Задача сія построится такъ: Пустъ будеть данъ шаръ, коего наибольшій кругъ $ABCD$, поперечникъ BD , а центръ E ; и пусть данное отношеніе будеть KN къ KL , большее отношенія трехъ къ двумъ. Поелику же какъ при къ двумъ, такъ ED , DB къ DB ; то HK къ KL имѣеть большее отношеніе, нежели ED , DB къ DB *: посему, отдѣленіемъ, HL къ LK имѣеть большее отношеніе, нежели ED къ DB *. Сдѣлай, какъ HL къ LK , такъ ED къ DF ; и ось F проводи, подъ прямыми углами къ BD , прямую AFC ; и чрезъ AC проводи плоскость перпендикулярную къ BD . Говорю, что шаровый опрѣзокъ ABC къ конусу ABC имѣеть то же отношеніе, что HK къ KL . Ибо сдѣлай, какъ ED , DF къ DF , такъ GF къ FB : посему конусъ CAG равенъ шаровому опрѣзку ABC †. И поелику (79) какъ HK къ KL , такъ ED , DF къ DF , то есть такъ GF къ FB *, то есть такъ конусъ AGC къ конусу ABC ; и конусъ AGC равенъ шаровому опрѣзку ABC : посему какъ опрѣзокъ ABC къ конусу ABC , такъ HK къ KL .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Ежели шаръ разсѣчется плоскостію не чрезъ центръ; то большій отрѣзокъ къ меньшему будетъ имѣть отношеніе меньшее, нежели удвоенное поверхности отрѣзка большаго къ поверхности меньшаго, а большее нежели полупорное (80).

Пусть будетъ шаръ, и его наибольшій кругъ ABCD, и поперечникъ BD; и пусть разсѣченъ будетъ чрезъ AC плоскостію перпендикулярною къ кругу ABCD; и шара большій отрѣзокъ пусть будетъ ABC. Говорю, что отрѣзокъ ABC къ отрѣзку ADC имѣетъ отношеніе меньшее, нежели удвоенное поверхности большаго отрѣзка къ поверхности меньшаго, а большее нежели полупорное.

Пропяни BA, AD; и пусть будетъ E центръ; и сдѣлай, какъ ED, DF къ DF, такъ HF къ FB, и какъ EB, BF къ BF, такъ GF къ FD; и вообрази конусы, имѣющіе основаніе кругъ около поперечника AC, а вершины въ почкахъ H, G. Итакъ, по вышеписанному будетъ, конусъ AHC равенъ отрѣзку ABC, а конусъ ACG отрѣзку ADC[†], и какъ квадрапъ изъ BA⁺³ къ квадрапу изъ AD, такъ поверхность

опрѣзка ABC къ поверхности опрѣзка $^{*}(53), r. ADC$. Надлежитъ же доказать, что боль-
шій опрѣзокъ шара къ меньшему имѣетъ
меньшее отношеніе, нежели удвоенное
поверхности опрѣзка большаго къ по-
верхности меньшаго. Говорю шакожъ,
что конусъ AHC къ конусу AGC , то
есть FH къ FG , имѣетъ меньшее отно-
шеніе, нежели удвоенное квадрата изъ
 BA къ квадрату изъ AD , то есть пря-
мая BF къ FD .

Поелику какъ ED , DF къ DF , такъ HF
къ FB , а какъ EB , BF къ BF , такъ FG
къ FD : то, по причинѣ что BE равна
 ED , будетъ какъ BF къ FD , такъ HB къ
^{въ 3 и 5.} BE , какъ прежде доказывано было⁴. Еще
же, поелику какъ EB , BF къ BF , такъ
 FG къ FD ; то, положивъ BK равную BE ,
^{б, r. и} замѣшивъ, что HB больше BE ^{*}, ибо
 BF больше FD , будетъ: какъ KF къ FB ,
такъ GF къ FD ; «и премѣненіемъ.» Но
какъ FB къ FD , такъ, по доказанному, HB
къ BE , и BE равна BK : посему какъ HB къ
^{и, r.} BK , такъ KF къ GF ^{*}. И поелику HF къ
 FK имѣетъ меньшее отношеніе, нежели
 HB къ BK (81); а какъ HB къ BK , такъ,
по доказанному, KF къ FG : посему HF
къ FK имѣетъ меньшее отношеніе, не-

жели и FK къ FG : чето ради прямоуголь-
 никъ въ HF , FG меньше квадрата изъ
 FK (82). Посему прямоугольникъ въ HF ,
 FG къ квадрату изъ FG , то есть FH
 къ FG^* , имѣеть меньшее отношеніе, не-^{*1, в.}
 жели квадратъ изъ KF къ квадрату изъ
 FG^* . Квадратъ же изъ KF къ квадрату^{*8, в.}
 изъ FG имѣеть удвоенное отношеніе KF
 къ FG : посему HF къ FG имѣеть отно-
 шеніе меньшее, нежели удвоенное KF къ
 FG . А какъ KF къ FG , такъ BF къ FD :
 посему HF къ FG имѣеть отношеніе мень-
 шее, нежели удвоенное BF къ FD . Чего
 мы и искали.

И поелику BE равна ED , то прямо-
 угольникъ въ BF , FD меньше прямоуголь-
 ника въ BE , ED^* : посему BF къ BE имѣеть^{*5, п.}
 меньшее отношеніе, нежели ED къ DF (83),
 то есть, нежели HB къ BF ; а посему
 квадратъ изъ FB меньше прямоугольника
 въ HB , BE (82), то есть въ HB , BK .
 Пусть будетъ квадратъ изъ BN равный
 прямоугольнику въ HB , BK (84); посему
 какъ HB къ BK , такъ квадратъ изъ HN
 къ квадрату изъ NK . Но квадратъ изъ
 HF къ квадрату изъ FK имѣеть большее
 отношеніе, нежели квадратъ изъ HN къ
 квадрату изъ NK (85): посему квадратъ

изъ HF къ квадрату изъ FK имѣеть большее отношеніе, нежели HV къ BK , то есть HV къ BE , то есть KF къ FG^* .

* 11, v. Чего ради HF къ FG имѣеть отношеніе большее, нежели полупорное KF къ FG , какъ то на концѣ доказано будетъ (86). Но какъ HF къ FG , такъ конусъ AHC къ конусу AGC , то есть отрѣзокъ ABC къ отрѣзку ADC ; а какъ KF къ FG , такъ BF къ FD , то есть квадратъ изъ BA къ квадрату изъ AD , то есть поверхность отрѣзка ABC къ поверхности отрѣзка ADC^+ . Итакъ большій отрѣзокъ къ меньшему имѣеть отношеніе меньшее, нежели удвоенное поверхности большаго отрѣзка къ поверхности меньшаго, а большее нежели полупорное.

+ 48 и 49 l.

Иначе. Пусть будетъ шаръ, коего наибольшій кругъ $ABCD$, поперечникъ AC и центръ E ; и пусть оный будетъ разсѣченъ чрезъ BD плоскостію перпендикулярною къ AC . Говорю, что большій отрѣзокъ DAV къ меньшему BVD имѣеть отношеніе меньшее, нежели удвоенное поверхности отрѣзка ABD къ поверхности отрѣзка BVD , а большее нежели полупорное. Протяни AB , BC . Итакъ

отношеніе поверхности къ поверхности
 есть тоже, что отношеніе круга, коего
 радіусъ АВ, къ кругу, коего радіусъ ВС,
 то есть тоже, что прямая АН къ пря-
 мой НС. Положи каждую изъ прямыхъ
 АГ, СГ равную радіусу круга. Ипакъ
 отношеніе отрѣзка ВАД къ отрѣзку ВСД
 сложено, изъ отношенія отрѣзка ВАД
 къ конусу, коего основаніе кругъ около
 поперечника ВД а вершина почка А, изъ
 отношенія сего конуса къ конусу, коего
 основаніе тоже а вершина почка С, и
 изъ отношенія сказаннаго пеперь кону-
 са къ отрѣзку ВСД*. Но отношеніе от- * (45).
 рѣзка ВАД къ конусу ВАД есть тоже что
 ГН къ НС[†]; отношеніе же конуса ВАД къ^{† 3}
 конусу ВСД есть тоже что и АН къ НС[†]; ^{† 3}
 и отношеніе конуса ВСД къ отрѣзку ВСД
 есть тоже, что и АН къ НГ[†] (87): а ^{+3; и * сл: 4,}
 отношеніе сложенное изъ отношеній, ГН
 къ НС, и АН къ НС есть тоже, что
 отношеніе прямоугольника въ АН, НГ
 къ квадрату изъ НС; (88) отношеніе же
 сложенное изъ отношенія прямоугольника
 въ ГН, НА къ квадрату изъ СН, и изъ
 отношенія АН къ НГ, есть тоже, что
 отношеніе прямоугольника въ ГН, НА
 на НА (89) къ квадрату изъ НС на НГ;

а отношеніе прямоугольника въ GH , HA на HA къ квадрату изъ HC на HF есть поже, что и квадрата изъ AN на NG къ квадрату изъ HC на HF (90); и припомъ отношеніе прямоугольника въ GM , HA на HA къ квадрату изъ HC на NG есть поже, что и отношеніе квадрата изъ HA къ квадрату изъ HC . Ипакъ, что квадраты изъ HA на NG къ квадрату изъ CH на GH имѣють меньшее отношеніе, нежели удвоенное прямыя AN къ HC , которое есть поже, что и отношеніе

*20, IV. квадрата изъ AN къ квадрату изъ HC *: сіе пошому, что квадраты изъ AN на GH къ квадрату изъ HC на HF имѣють меньшее отношеніе, нежели пошъ же квадраты изъ AN на GH къ квадрату изъ *8, V. CH на NG *, пошому что квадраты изъ HC на HF больше квадрата изъ CH на NG , пошому что HF больше NG .

Утверждаю такожь, что большій опрѣзокъ къ меньшему имѣють отношеніе большее, нежели полуторное поверхности къ поверхности. Поелику же доказано, что отношеніе опрѣзковъ есть поже, что отношеніе квадрата изъ AN на NG къ квадрату изъ HC на HF ; а отношеніе поверхности къ поверхности есть

полуторное отношенія куба изъ АВ къ кубу изъ ВС (91): то утверждаю, что квадраты изъ АН на НГ къ квадрату изъ СН на НГ имѣеть большее отношеніе, нежели кубъ изъ АВ къ кубу изъ ВС, то есть кубъ изъ АН къ кубу изъ НВ*, ^{*37, XII и 8, VI.} то есть квадраты изъ АН къ квадрату изъ НВ, и АН къ НВ* (92). Но отноше- ^{*с, XII.} ніе квадрата изъ АН къ квадрату изъ НВ совокупленное съ отношеніемъ АН къ НВ, есть тоже, что отношеніе квадрата изъ АН къ прямоугольнику въ СН, НВ (93); отношеніе же квадрата изъ АН къ прямоугольнику въ СН, НВ есть тоже, что отношеніе квадрата изъ АН на НГ къ прямоугольнику въ СН, НВ на НГ: посему утверждаю, что квадраты изъ АН на НГ къ квадрату изъ СН на НГ имѣеть большее отношеніе, нежели квадраты изъ АН къ прямоугольнику въ ВН, НС, то есть квадратъ изъ АН на НГ къ прямоугольнику въ ВН, НС на НГ. Посему надлежитъ доказать, что квадраты изъ СН на НГ есть меньше прямоугольника въ ВН, НС на НГ*; а сіе ^{*10, V.} значить доказать, что квадраты изъ СН къ прямоугольнику въ ВН, НС имѣеть меньшее отношеніе, нежели СН къ НГ (94):

посему надлежитъ доказать, что GH къ HF имѣетъ большее отношеніе, нежели CH къ NB^* . Проведи отъ точки E подъ прямыми углами къ EC прямую EK , и отъ B перпендикулярную къ ней прямую BL . Поелику же оставалось доказать, что GH къ HF имѣетъ большее отношеніе, нежели CH къ NB ; а HF равна AN , KE : посему надлежитъ доказать, что GH къ HA , KE имѣетъ большее отношеніе, нежели CH къ NB . Слѣдовательно, опнявъ отъ GH прямую CH , а отъ KE прямую EL равную BN , должно будетъ доказать, что оставшаяся CG къ оставшей AN , KL имѣетъ большее отношеніе (95), нежели CH къ NB , то есть NB къ HA^* , то есть LE къ HA ; и премѣненіемъ, что « CG , то есть » KE къ LE имѣетъ большее $g, v.$ отношеніе, нежели KL , HA къ HA^* ; и отдѣленіемъ, что KL къ LE имѣетъ $k, v.$ большее отношеніе, нежели KL къ HA^* ; и наконецъ, что LE больше HA .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Изъ шаровыхъ опрѣзковъ, содержимыхъ въ равной поверхности, наибольшій есть полушаріе.

Пусть будетъ шаръ, коего наибольшій

кругъ $ABCD$, и поперечникъ AC , и другой шаръ, коего наибольшій кругъ $EFGH$, и поперечникъ EG ; и пусть разсѣчены будутъ плоскостію, одинъ проходящею а другой не проходящею чрезъ центръ; и пусть сѣкущія плоскости будутъ перпендикулярны къ поперечникамъ AC , EG , и дѣлають сѣченія по линіямъ DB , FN . Здѣсь отрѣзокъ шара что по дугѣ FEN , есть полушаріе; изъ отрѣзковъ же что по дугѣ BAD , одинъ, въ фигурѣ на коей точка S , большій полушарія, а другой, въ другой фигурѣ, меньшій полушарія. И пусть всѣхъ сказанныхъ отрѣзковъ будутъ поверхности равныя. Говорю, что полушаріе, которое по дугѣ FEN , больше отрѣзка что по дугѣ BAD .

Поелику сказанныхъ отрѣзковъ поверхности суть равныя, то явно что и BA равна прямой EF : ибо доказано, что поверхность всякаго отрѣзка равна кругу, коего радіусъ равенъ прямой проведенной отъ вершины отрѣзка до окружности его основанія[†]. И поелику дуга BAD , въ * 48 и 49, 1. фигурѣ на коей точка S , больше половины круга; то явно, что квадратъ изъ BA есть меньше двукратнаго изъ AK (96), а больше двукратнаго изъ радіуса (97).

Пусть будетъ радиусу круга ABD равна прямая СО, «а радиусу круга EFN прямая AR;» и какое отношеніе имѣеть СО къ СК, пусть тоже имѣеть МА къ АК; и на кругѢ что около поперечника BD, пусть будетъ конусъ, имѣющій вершину въ точкѢ М: посему онъ равенъ шаровому ^{†3.} опрѣзку что по дугѢ BAD[†]. И пусть еще прямой EL будетъ равна EN; и на кругѢ что около поперечника HF, пусть будетъ конусъ, имѣющій вершину въ точкѢ N: посему онъ равенъ полушарію, ^{†36, 1.} что по дугѢ HEF[†]. И поелику прямоугольникъ содержимый въ AR, RC больше прямоугольника содержаемаго въ АК, КС, ибо перваго меньшая сторона есть больше меньшей стороны другаго (98); а квадрашъ изъ AR равенъ прямоугольнику содержимому въ АК, СО, ибо онъ есть половина квадраша изъ АВ (99): посему и оба первые обоихъ послѣднихъ больше (100); а посему прямоугольникъ содержимый въ СА, AR больше прямоугольника въ ОК, КА. Прямоугольнику же въ ОК, КА равенъ прямоугольникъ въ МК, КС (101): слѣдственно прямоугольникъ въ СА, AR больше и прямоугольника въ МК, КС; а посему СА къ СК имѣеть большее оп-

ношеніе, нежели $МК$ къ AR . Но какое отношеніе имѣетъ AC къ $СК$, поже имѣетъ и квадрапъ изъ AB къ квадрапу изъ BK (102): изъ сего слѣдуетъ (103), что половина квадрапа изъ AB , которая равна квадрапу изъ AR , имѣетъ къ квадрапу изъ BK большее отношеніе, нежели (104) $МК$ къ двукратной AR , которая равна LN . Посему и кругъ что около поперечника FN , къ кругу что около поперечника BD , имѣетъ большее отношеніе, нежели $МК$ къ NL : слѣдовательно конусъ, имѣющій основаніе кругъ, что около поперечника FN , а вершину въ точкѣ N , больше конуса, имѣющаго основаніе кругъ что около поперечника BD , а вершину въ точкѣ M (105). А пошому и полушаріе что по дугѣ FEN , есть больше отрѣзка что по дугѣ BAD .

АРХИМЕДА

ИЗМѢРЕНІЕ КРУГА.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Всякій кругъ равенъ прямоугольному преугольнику, коего одна изъ сторонъ чпо около прямого угла, равна радіусу круга, а другая его окружности.

Пусть будетъ кругъ $ABCD$, такой въ сравненіи съ преугольникомъ E , каковымъ предполагается. Говорю, чпо онъ равенъ преугольнику E .

Ибо пусть, есѣли возможно, кругъ будетъ больше. Впиши въ немъ квадрапъ AC ; и раздѣлай дуги по поламъ; и пусть оспавшіеся наконецъ опрѣзки будутъ меньше избытка круга предъ преуголь-

* въ 2, XII. никомъ*: по полученная прямолинейная фигура будетъ также больше преугольника. Возьми цирпъ N , и проводи перпендикуляръ NO . Итакъ NO меньше одной изъ сторонъ преугольника E . А и

очершаніе прямолинейной фигуры меньше другой стороны, ибо оно меньше окружности круга[†]; посему прямолинейная фигура есть меньше треугольника, что нелѣпо.

Но пусть будетъ кругъ, естѣли возможно, меньше треугольника E . Опиши квадрату, и раздѣли дуги по поламъ, и чрезъ точки сѣченія проводи касательныя. Ишакъ уголъ PAR есть прямой: посему PR больше MR^* , ибо MR равна RA : и пошому треугольникъ RQ больше половины фигуры $PFAM^*$. Пусть останутся отрѣзки, какъ QFA , шакіе, кои меньше избытка треугольника E предъ кругомъ $ABCD^*$. Посему описанная прямолинейная фигура будетъ шакже меньше треугольника E ; что нелѣпо: ибо она больше, пошому что NA равна высотѣ треугольника, а очершаніе фигуры больше его основанія[†].

Ишакъ кругъ равенъ треугольнику E .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Кругъ къ квадрату изъ его поперечника имѣетъ отношеніе, почти какъ 11 къ 14.

Пусть будетъ кругъ, коего попереч-

никъ АВ, и описанный квадрать CGD; и пусть будетъ прямой линіи CD двукрашная DE и седьмая часть EF.

Поелику преугольникъ ACE къ преугольнику ACD имѣеть опношеніе, какъ *1, VI. 21 къ 7*; а преугольникъ ACD къ преугольнику AEF имѣеть опношеніе, какъ 7 къ 1 (106): посему какъ преугольникъ ACF къ преугольнику ACD, такъ 22 къ 7 (107). Но преугольника ACD есть чепырекрашный квадрать CG (108): посему какъ преугольникъ ACF къ квадрату CG, такъ 22 къ 28, или такъ 11 къ 14. А преугольникъ ACF равенъ почти кругу АВ: ибо высота AC равна радіусу круга, а основаніе равно почти окружности, копорая, какъ доказано будетъ, равна прикрашному поперечнику и еще седмой почти его части. Итакъ кругъ къ квадрату CG имѣеть опношеніе, почти какъ 11 къ 14.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Окружность всякаго круга равна прикрашному поперечнику, съ избыткомъ, который меньше седмой части поперечника, а больше десяти семдесятъ первыхъ.

Пусть будетъ кругъ, коего поперечникъ AC , центръ E , и касательная CLF ; и пусть будетъ уголъ FEC преть прямого. Итакъ EF къ FC имѣеть отношеніе, какъ 306 къ 153 (109); а посему EC къ CF будетъ имѣть большее отношеніе, нежели 265 къ 153.

Раздѣли уголъ FEC по поламъ прямою EG : посему будетъ какъ FE къ EC , такъ FG къ GC ; и совокупленіемъ и премѣненіемъ, какъ FE , EC къ FC , такъ EC къ CG^* (110). Слѣдственно CE къ $CG^{*18 \text{ и } 16, r.}$ имѣеть большее отношеніе, нежели 571 къ 153 (111). Посему въ степеняхъ EG къ GC имѣеть большее отношеніе, нежели 349450 къ 23409; (112) а посему EG къ GC имѣеть большее отношеніе, нежели $591\frac{1}{8}$ къ 153.

Раздѣли еще уголъ GEC по поламъ прямою EH : то (113) потому же EC къ CH будетъ имѣть большее отношеніе, нежели $1162\frac{1}{8}$ къ 153 (114). А посему HE къ HC будетъ имѣть большее отношеніе, нежели $1172\frac{1}{8}$ къ 153.

Раздѣли также уголъ HEC по поламъ прямою EK : то EC къ CK будетъ имѣть большее отношеніе (115), нежели $2334\frac{1}{4}$ къ 153 (116). Посему EK къ CK будетъ

имѣть большее отношеніе, нежели $2339\frac{1}{4}$ къ 153.

Раздѣли напослѣдокъ уголь КЕС по поламъ прямою LE: то ЕС къ LC будетъ имѣть большее отношеніе, нежели $4673\frac{1}{2}$ къ 153.

Итакъ, поелику уголь FЕС, который есть третьяго прямого, раздѣленъ чепыре раза по поламъ, то уголь LЕС есть $\frac{1}{48}$ прямого: и пошому сославъ при точкѣ Е уголь СЕМ равный углу LЕС, то уголь LЕМ будетъ $\frac{1}{24}$ прямого. Слѣдственно прямая LM естъ сторона многоугольника описаннаго, имѣющаго 96 сторонъ.

И поелику ЕС къ CL имѣетъ, по доказанному, большее отношеніе, нежели $4673\frac{1}{2}$ къ 153; и прямой ЕС есть двукратная АС, а прямой CL двукратная LM: поему и АС къ LM имѣетъ большее отношеніе, нежели $4673\frac{1}{2}$ къ 153*; чего ради АС къ очершанію 96 угольника имѣетъ большее отношеніе, нежели $4673\frac{1}{2}$ къ 14688; слѣдственно, преложеніемъ, очершаніе многоугольника къ поперечнику имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 14688 къ $4673\frac{1}{2}$ *. Но изъ сихъ чиселъ первое другаго есть трикратное съ избыткомъ $667\frac{1}{2}$, который меньше нежели седмая

часть числа $4673\frac{1}{2}$: посему очертаніе многоугольника около круга описаннаго есть прикрапное поперечника, съ избыткомъ, который меньше седмой его части: а слѣдовашельно окружность круга пѣмъ паче меньше нежели прикрапный поперечникъ, съ седмою его частію*. *сл. 2, (55).

Пусть будетъ кругъ, и поперечникъ АС, и уголь ВАС прешь прямого. Ипакъ АВ къ ВС имѣеть меньшее опношеніе, нежели 1351 къ 780; а АС къ СВ поже, что 1560 къ 780 (117).

Раздѣли уголь ВАС по поламъ прямою АГ. И поелику уголь ВАГ равенъ какъ углу ГСВ*, такъ и углу ГАС, то уголь ГСВ*^{21, III} равенъ углу ГАС; уголь же АГС есть общій: посему и прешій уголь ГГС будетъ равенъ прешьему АГГ. Чего ради преугольникъ АГС есть равноугольный преугольнику СГГ; и потому какъ АГ къ ГС, такъ СГ къ ГГ, и такъ АС къ СГ. Но какъ АС къ СГ, такъ СА, АВ къ ВС: посему какъ ВА, АС къ ВС, такъ АГ къ ГС* (118): чего ради АГ къ ГС имѣеть*^{11, V} меньшее опношеніе, нежели 2911 къ 780 (119); и АС къ ЕГ имѣеть меньшее опношеніе, нежели $3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ къ 780. с

Раздѣли уголь САГ по поламъ прямою АН; то пошому же АН къ НС будетъ имѣть меньшее отношеніе, нежели $5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ къ 780, или нежели 1823 къ 240, ибо каждое каждаго есть $\frac{4}{13}$ (120). Слѣдственно АС къ СН имѣетъ меньшее отношеніе, нежели $1838\frac{9}{11}$ къ 240 (121).

Раздѣли еще уголь НАС по поламъ прямою КА. Посему КА къ КС имѣетъ меньшее *15и13, r. отношеніе, нежели $3661\frac{9}{11}$ къ 240, или нежели 1007 къ 66*, ибо каждое каждаго есть $\frac{11}{40}$. Посему АС къ СК имѣетъ меньшее отношеніе, нежели $1009\frac{1}{6}$ къ 66 (122).

Раздѣли наконецъ уголь КАС по поламъ прямою LA. Посему AL къ LC имѣетъ меньшее отношеніе, нежели $2016\frac{1}{6}$ къ 66, а АС къ CL меньшее, нежели $2017\frac{1}{4}$ къ 66 (123).

Итакъ, предложениемъ, LC къ СА имѣетъ *f, r. большее отношеніе, нежели 66 къ $2017\frac{1}{4}$ *, а очертаніе многоугольника къ поперечнику имѣетъ большее отношеніе, нежели 6336 къ $2017\frac{1}{4}$. Но въ нихъ первое есть прикрапное числа $2017\frac{1}{4}$, съ избыткомъ, кошорой больше нежели $\frac{10}{11}$ (124): посему очертаніе ошнугольника вписаннаго въ кругъ есть прикрапное поперечника, съ избыткомъ, кошорый больше

нежели $\frac{10}{71}$. Слѣдственно окружность круга шѣмъ паче будетъ прикрапная поперечника, съ избыткомъ, который больше нежели $\frac{10}{71}$.

Ишакъ окружность круга есть поперечника прикрапная, съ избыткомъ, который меньше нежели седьмая часть, но больше нежели десять семдесятъ первыхъ поперечника.

АРХИМЕДА

ЛЕММЫ

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Ежели два круга касаются взаимно, какъ круги AEB , CED въ E ; и поперечники ихъ будутъ параллельны, каковы поперечники AB , CD ; и между точекъ B , D и прикосновеніемъ E просянутся DE , BD : то линія BE будетъ прямая.

Пусть будутъ G , F центры круговъ.

пр. 1. Прояни GF^ , и продолжи оную до E ; и

31, 1. проводи DH параллельную къ GF^ . Поелику HF равна GD , и GD , EG суть равныя же: посему и опъ равныхъ FB , FE будутъ остальныя GF то есть DH , и HB вза-

акс. 3. имно равныя; а посему и углы HDB , HBD

5, 1. будутъ взаимно равны. Но и углы EGD , EFB также и углы EGD , DHB суть рав-

29, 1. ные: посему и остальныя GED , GDE равныя взаимно, равны угламъ HDB , HBD ; а посему уголь EDG равенъ углу DBF . При-

помъ уголь GDB есть общій: чего ради два угла GDB , FBD (кои равны двумъ прямымъ*) равны двумъ угламъ GDB , GDE ; *29, I. а потому и сии углы равны двумъ прямымъ. Ипакъ линія EDB есть прямая* (125). *14, I. Что и доказашь надлежало.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Пусть будетъ полукружіе CBA , къ коему касаются прямая DC , DB ; и BE перпендикулярная къ AC ; и пусть пропшянуша будетъ AD , пресѣкающая прямую BE въ F . Говорю, что BF равна FE .

Пропшяни AB ; и продолжи оную также и CD , и пусть онѣ встрѣхнутся въ A ; и пропшяни CB . Ипакъ уголь CBA , будучи въ полукружіи, есть прямой*; а посему *31, III. и уголь CBG прямой. И поелику $DBEC$ есть прямоугольникъ; то въ прямоугольномъ треутольникѣ GBC , проведенная отъ B прямая BD перпендикулярна къ основанію. Но BD , DC взаимно равны*, *2, III. ибо онѣ суть двѣ касательныя къ кругу; посему и CD равна DG (126): какъ доказано нами въ сочиненіи о прямоугольныхъ треутольникахъ (127). И поелику въ прямоугольномъ треутольникѣ GAC , прямая BE параллельна къ основанію, и

отъ середины основанія проведена DA , пересѣкающая шу параллельную въ F : посему и BF будетъ равна FE (128). Ч. И Д. Н. (129).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Пусть будетъ круга ошрѣзокъ CA , и гдѣ нибудь на немъ почка B , и BD перпендикулярная къ AC , а ошрѣзокъ DE равный DA , и дуга BF равная дугѣ BA . Говорю, что пропянушая прямая CF равна CE .

Пропяни AB , BF , FE , EB . Поелику дуга BA равна дугѣ BF , шо и прямая AB равна прямой BF^* . Еще же, поелику AD равна ED , и два угла при D прямые, а DB общая; посему AB равна BE^* . Чего ради BF , BE суть равныя: и попому два угла BFE ; BEF взаимно равны. И поелику чепыреугольникъ $CFBA$ въ кругѣ; шо уголь CFB съ угломъ CAB , ему прошивулежащимъ, слѣдствено и съ угломъ BEA , равенъ двумъ прямымъ*. Но и уголь CEB съ угломъ BEA равенъ двумъ же прямымъ*: посему углы CFB , CEB взаимно равны*; а посему и остальные CFE , CEF взаимно равны. Чего ради CE равна CF^* . Ч. И Д. Н.

*29, III.

*4, I.

*22, III.

*13, I.

*акс. 10.

III 3.

*6, I.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Пусть будетъ полукружіе ABC , и надъ его поперечникомъ AC пусть будутъ два полукружія, одно AD а другое DC , и прямая DB перпендикулярная. Говорю, что произшедшая фигура, называемая Арбелонъ, то есть поверхность, содержащая дугою полукружія большаго и двумя дугами полукружій меньшихъ, равна кругу, коего поперечникъ перпендикуляръ DB .

Поелику прямая DB есть средняя пропорціональная между двумя прямыми DA , DC^* ; то прямоугольникъ въ AD , DC равенъ квадрату изъ DB^* . Придай общему AD , DC съ квадратами изъ AD , DC : посему двукратный прямоугольникъ въ AD , DC , съ двумя квадратами изъ AD , DC , то есть квадратъ изъ AC^* , равенъ (130) двукратному квадрату изъ DB , съ двумя квадратами изъ AD , DC . Но круги пропорціональны квадратамъ: посему и кругъ, коего поперечникъ AC , равенъ двукратному кругу, коего поперечникъ DB , съ двумя кругами, коихъ поперечники AD , DC : а посему полукружіе AC равно кругу, коего поперечникъ DB , съ двумя полукружія-

*акс. 7. ми AD , DC *. Отними обще два полукружія AD , DC : посему оспальная фигура, содержимая полукружіями AC , AD , DC , именуемая Арбелонъ, равна кругу, коего поперечникъ DB . Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Пусть будетъ полукружіе AB , и на поперечникѣ его какая ниесть точка C , и два полукружія AC , CB ; и пусть будетъ отъ C поставлена перпендикулярная къ AB прямая CD ; и по обѣимъ ея сторонамъ пусть будутъ написаны два круга, касательные къ ней и къ полукружіямъ. Говорю, что сіи круги взаимно равны.

Пусть одинъ изъ нихъ касается къ прямой DC въ E , къ полукружію AB въ F , а къ полукружію AC въ G . Проведи поперечникъ HE , то онъ будетъ параллельный къ поперечнику AB : ибо два угла *1. HEC , ACE суть прямые†; и просяни FN , HA , то AF будетъ прямая, по доказанному въ первомъ предложеніи. И пусть *акс. 11. AF , CE встрѣятся въ D : сіе же будетъ пошому, что углы, ими сосставляемые при A , C , суть меньше двухъ прямыхъ; и просяни FE , EB : то EFB , сходно съ

предыдущимъ, будетъ прямая; и при-
помъ перпендикулярна къ AD , ибо уголъ
 AFB прямой, поелику онъ въ полукружii AB .
Пропяни еще HG , GC , то и HC будетъ
прямая; и пропяни EG , GA , то и EA
будетъ прямая; продолжи оную до I , и
пропяни BI , то и сiя будетъ перпенди-
кулярна къ AI ; и наконецъ, пропяни DI .
Ишакъ, поелику AD , AB суть двѣ пря-
мыя; и проведены, ось D перпендику-
лярная къ AB прямая DC , и ось B пер-
пендикулярная къ DA прямая BF , копо-
рыя взаимно пресѣкающся въ E ; и AE ,
продолженная до I , перпендикулярна къ BI :
то линия BD будетъ прямая (131), какъ
доказано нами въ предложенiяхъ, находя-
щихся въ сочиненiи о прямоугольныхъ
треугольникахъ. И поелику углы AGC ,
 AIB прямые, то BD , CG параллельны*; *28, 1.
посему какъ AD къ DH , то естъ какъ
 AC къ HE (132), такъ AB къ BC : чего *4, VI.
ради прямоугольникъ въ AC , CB равенъ
прямоугольнику въ AB , HE *. Подобно и *16, VI.
о кругѣ LMN докажешся, что прямо-
угольникъ въ AC , CB равенъ прямоуголь-
нику содержимому въ AB и въ его попе-
речникѣ. А ошсюда докажешся, что кру-
говъ EFG , LMN поперечники равны: а

спр. 1, III. потому и самые круги взаимно равны.
Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Пусть будетъ полукружіе ABC , и на поперечникѣ его точка D , взявая такъ, чтобъ AD была полупорная прямой DC ; и пусть на AD , DC напишутся полукружія, и между шрема полукружіями помѣстится кругъ EF , касательный ко всѣмъ имъ, и въ немъ проведенъ будетъ поперечникъ EF параллельный къ поперечнику AC . Надлежитъ сыскать отношеніе поперечника AC къ поперечнику EF .

Протяни AE , EB и CF , FB : то CB , AB будутъ прямыя, по доказанному въ первомъ предложеніи; и проводи также двѣ линіи FGA , ENC : то докажется, что и сіи будутъ прямыя, равно какъ и DE , DF ; и протяни DI , DL , и еще EM , FN продолживъ оныя до O , P . Итакъ, поелику въ треугольникѣ AED прямая AG перпендикулярна къ ED , а DI перпендикулярна къ AE , и онѣ пресѣкаются взаимно въ M : то и EMO будетъ перпендикулярна, какъ показано нами въ сочиненіи о свойствахъ треугольниковъ, и чему доказательство предполагaемо было въ

предыдущемъ предложеніи. Подобно и FP будетъ перпендикулярна къ CA . И поелику два угла при L и V суть прямые, то DL параллельна къ AB . Потому же и DI параллельна къ CB . Чего ради какъ AD къ DC , такъ AM къ FM , и такъ AO къ OP^* ; и какъ CD къ DA , такъ CN къ NE , ^{*2, г.} и такъ CP къ PO . Но AD есть полупорная прямой DC : посему и AO полупорная прямой OP , и PO прямой CP^* . Итакъ ^{*4, г.} при прямые AO , OP , PC пропорціональны; и въ какой мѣрѣ PC есть 4, въ такой будетъ OP 6, AO 9 и CA 19. И поелику PO равна EF , то какъ AC къ EF , такъ 19 къ 6. Итакъ сказанное въ предложеніи найдено.

Такимъ же образомъ, естли AD въ отношеніи къ DC будетъ какая нисеть другая, на примѣръ: $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, или иная: то должно будетъ разсуждать и поступать по предыдущему. (133).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели около квадрата опишется кругъ, и въ немъ же впишется другой: то описанный будетъ двукратный вписаннаго.

Пусть будетъ кругъ AB описанный

около квадрата AB , и въ немъ вписанный CD ; и пусть будетъ квадрата поперечникъ AB , то онъ же и поперечникъ круга описаннаго. Проведи круга вписаннаго поперечникъ CD параллельный къ сторонѣ AE , то онъ ей равенъ. И поелику квадратъ изъ AB двукрашный квадрата изъ AE или изъ DC ; и отношеніе квадратовъ изъ поперечниковъ круговъ есть поже, что и отношеніе круга къ *2, XII. кругу*: слѣдственно кругъ AB есть двукрашный круга CD . Ч И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели въ кругѣ помѣстится нѣкая прямая AB , и продолжится впрямъ, и положится BC равная радіусу круга, и пропхянута будетъ прямая отъ C до центра D круга, и продолжится до E : то дуга AE будетъ прикрашная дуги BF .

Проведи EG параллельную къ AB ; и пропхни DB , DG . Поелику два угла DEG , DGE суть равные, то уголь GDC двукрашный угла DEG *. Поелику же уголь BDC равенъ углу BCD , и уголь CEG равенъ углу ACE ; посему уголь GDC будетъ двукрашный и угла CDB , а цѣлый BDG прикрашный угла BDC : чего ради и ду-

га BG , равная дугѣ AE , будетъ прикраи-
ная дуги BF^* .

*33, VI.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Ежели въ кругѣ двѣ прямыя AB , CD , не проходящія чрезъ центръ, пресѣкающія взаимно подъ прямыми углами: то двѣ дуги AD , CB будутъ равны двумъ дугамъ AC , DB .

Проведи параллельный къ AB поперечникъ EF , то онъ разсѣчетъ CD по поламъ въ G : посему EC равна ED . И поселику *3, III. какъ дуга EDF , такъ и дуга ECF есть полукружіе; а дуга ED равна дугѣ EA съ дугою AD : посему дуга CF съ двумя дугами EA , AD будетъ равна полукружію. Но EA равна BF : посему и дуга CB съ дугою AD равна полукружію. Слѣдственно и остальные двѣ дуги EC , EA , то есть дуга AC , съ дугою DB , равны полукружію же. Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Пусть будетъ кругъ ABC , и DA касательная къ нему, и DB сѣкущая оный, и еще DC касательная; и пусть будетъ проведена параллельная къ DB прямая CE , и просянуша EA , пресѣкающая DB

въ F ; и отъ F пусть проведена будетъ перпендикулярная къ CE прямая FG . Говорю, что она разсѣчетъ прямую CE по поламъ въ G .

Прошяни AC . Поелику DA касательная къ кругу, а AC сѣкущая оный: то уголь DAC равенъ углу въ накосълежащемъ опрѣзкѣ AC , то есть углу AEC *. А сей равенъ углу AFD , ибо CE , BD параллельны: посему углы DAC , AFD взаимно равны. Ипакъ въ треугольникахъ DAF , $АНD$ углы AFD , $НАD$ суть равны, и уголь при D общій: и потому прямоугольникъ въ FD , $ДН$ равенъ квадрату изъ DA *, то есть изъ DC *. И поелику какъ FD къ DC , такъ DC къ $ДН$, а уголь при D общій; слѣдственно треугольники DFC , $ДСН$ подобны*: а посему уголь DFC равенъ углу $ДСН$, который равенъ углу $ДАН$. Сей же равенъ углу AFD *: чего ради углы AFD , CFD взаимно равны. Но уголь DFC равенъ углу FCE , и по доказанному, уголь DFA равенъ углу AEC : посему треугольника FCE углы при C , E взаимно равны. Сверхъ того углы при G прямые, и сторона GF общая: слѣдственно CG равна GE *. Ипакъ CE разсѣчена по поламъ въ G . Ч. И. Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Ежели въ кругѣ двѣ прямыя АВ, СD пресѣкающіяся въ точкѣ Е, которая не центръ: то квадраты изъ АЕ, ВЕ, ЕС, ЕD равны квадрату изъ поперечника.

Проведи поперечникъ АF; и просяни АС, АD, СF, DВ. И поелику уголъ АЕD прямой, то онъ равенъ углу АСF; и уголъ АDС равенъ углу АFС, ибо стоятъ на тойже дугѣ АС: посему и остальные двухъ треугольниковъ АDE, АFС углы САF, DAE взаимно равны: слѣдственно и дуги CF, DВ взаимно равны*; а посему *26, III. равны и хорды ихъ. И поелику квадраты изъ DE, ЕВ равны квадрату изъ BD, то есть изъ CF, и квадраты изъ АЕ, ЕС квадрату изъ СА; квадраты же изъ CF, СА равны квадрату изъ FА, то есть изъ поперечника: посему всѣ квадраты изъ АЕ, ЕВ, СЕ, ЕD равны квадрату изъ поперечника. Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Пусть будетъ полукружіе на поперечникѣ АВ; и пусть проведены будутъ отъ С двѣ касательныя къ полукружію

въ точкахъ D , E , и пропѣянушы EA , DB , пресѣкающіяся взаимно въ F ; и пустьъ пропѣянуша будетъ CF и продолжена до G . Говорю, что CG перпендикулярна къ AB .

Пропѣяни DA , EB . Поелику уголь BDA прямой, то остальные два угла DAV ,
 14. DVA треугольника DAV равны прямому. Но и уголь AEB прямой: слѣдственно шѣ углы и ему равны. Придай обще уголь FBE : посему два угла DAV , ABE равны угламъ FBE , FEV , то есть углу DFE , внѣшнему треугольника FBE . И поелику CD касательная къ кругу, и DB сѣкущая оный; то уголь CDB равенъ углу
 *32, III. DAV . Потому же и уголь CEF равенъ углу EBA . Чего ради углы CEF , CDF равны углу DFE . Доказано же нами въ книгѣ о чепытреугольникахъ, что ежели между двумя прямыми равными, взаимно встрѣчающимся въ нѣкоей точкѣ, каковы CD , CE , проведущся двѣ прямая, также взаимно пресѣкающіяся, каковы DF , EF , и уголь ими содержимый, каковъ при F , будетъ равенъ двумъ угламъ составленнымъ сими линиями съ прежними, каковы углы CEF , CDF ; то пропѣянушая отъ точки встрѣчи до пресѣченія прямая, какова CF , равна каждой изъ прямыхъ

встрѣчающихся, какъ CD или CE (134): по сему CF равна CD ; а по сему уголъ CFD равенъ углу CDF , то есть углу DAG . Но уголъ CFD съ угломъ DFG равенъ двумъ прямымъ: по сему и уголъ DAG съ угломъ DFG равенъ двумъ прямымъ: а по сему и остальные чепыреугольника $ADFG$ углы ADF , AGF равны двумъ прямымъ. Но уголъ ADB прямой, слѣдовательно и уголъ AGC прямой: и по сему CG перпендикулярна къ AB . Ч. И. Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Ежели въ кругѣ двѣ прямыя AB , CD взаимно пресѣкаются, изъ коихъ AB поперечникъ а CD не поперечникъ; и опъ точекъ A , B проведены будутъ перпендикулярныя къ CD прямыя AE , BF : то оными опнимутся прямыя CF , DE взаимно равныя.

Пропяни EB ; и опъ центра, которъ пусть будетъ въ I , проведи перпендикулярную къ CD прямую IG , и продолжи оную до H на EB . И поелику IG , проходя чрезъ центръ, перпендикулярна къ CD ; то разсѣкаетъ оную по поламъ въ G . Еще же, поелику IG , AE къ ней перпендикулярны, то онѣ параллельны взаимно. И

*2, VI. какъ $ВІ$ равна $ІА$; посему $ВН$ равна $НЕ$ *. По равенству же ихъ и по причинѣ что $ВГ$ параллельна къ $НГ$, будетъ FG равна GE . Чего ради и остальные отъ равныхъ GC , GD прямые FC , ED суть равныя. Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Пусть будетъ полукружіе AB ; и пусть отъ поперечника его отнимутся равныя прямые AC , BD , и на AC , CD , DB напишутся полукружія; и пусть будетъ двухъ полукружій AB , CD центръ E , и перпендикулярная къ AB прямая EF , которая продолжена до G . Говорю, что кругъ, коего поперечникъ FG , равенъ фигурѣ называемой Салинонь, то есть поверхности, содержимой полукружіемъ большимъ, двумя малыми внутри его лежащими, и однимъ среднимъ лежащимъ внѣ.

Поскольку DC разсѣчена по поламъ въ E , и приложена впрямъ къ ней прямая CA ; то квадраты изъ DA , CA суть двукратные квадраты изъ DE , EA *. Но FG равна DA ; посему квадраты изъ FG , AC двукратны квадратовъ изъ LE , EA . И поскольку AB двукратна прямой AE , а CD двукратна прямой ED : то квадраты изъ

AB , DC четырехкратны сущъ квадратовъ
 изъ DE , EA^* , то есть двукратны квад- ^{*(22)}.
 ратовъ изъ GF , AC . Посему и два круга,
 коихъ поперечники AB , DC , двукратные
 сущъ двухъ круговъ, коихъ поперечники
 GF , AC : а посему половины круговъ,
 коихъ поперечники AB , CD , равны двумъ
 кругамъ, коихъ поперечники GF , AC . Но
 кругъ, коего поперечникъ AC , равенъ
 двумъ полукружиямъ AC , BD : посему, опи-
 нивъ общія два полукружия AC , BD , бу-
 дещъ оспальная фигура, содержащая въ
 четырехъ полукружияхъ AB , CD , DB , AC ,
 называемая Салипонъ, равна кругу, коего
 поперечникъ FG . Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Пусть будетъ AB полукружіе, AC сто-
 рона пятиугольника, и дуга AD половина
 дуги AC ; и пусть будетъ пропѣяну-
 та CD и продолжена до E , и еще про-
 пѣянута DB , пресѣкающая прямую CA
 въ F ; и отъ F пусть проведена будетъ
 перпендикулярная къ AB прямая FG . Го-
 ворю, что EG равна радіусу круга.

Пропѣяни CB , и возьми центръ H , и
 пропѣяни HD , DG и AD . И поелику уголь
 ABC , стоящій на сторонѣ пятиуголь-

- ника, есть двѣ пятыхъ прямого угла (135),
то каждый изъ двухъ угловъ $\angle CBD$, $\angle DBA$
будетъ пятая часть прямого. Но уголъ
*20, III. $\angle DNA$ двукратный угла $\angle DNH$: посему уголъ
 $\angle DNA$ будетъ двѣ пятыхъ прямого. И поели-
ку двухъ треугольниковъ $\triangle CBF$, $\triangle GBF$ углы
при B суть равные, при G , C прямые,
и сторона FB общая: посему BC равна
 BG . Чего ради двухъ треугольниковъ $\triangle CBD$,
 $\triangle GBD$ стороны CB , BG взаимно равны,
также и углы при B , и сторона BD
общая: посему и углы $\angle BCD$, $\angle BGD$ суть
равные. Но каждый изъ нихъ есть шесть
пятыхъ прямого (136), и равенъ углу $\angle DAE$
*b, III. въшнему чепыреугольника $\angle ADC$, копо-
рый въ кругѣ: слѣдственно остальной
уголъ $\angle DAB$ равенъ остальному $\angle DGA$; а
посему DA равна DG . И поелику уголъ
 $\angle DHG$ есть двѣ пятыхъ, а уголъ $\angle DGH$ шесть
пятыхъ прямого: посему остальной уголъ
 $\angle HDG$ будетъ двѣ пятыхъ прямого, а по-
сему DG равна GH . Еще же, поелику
уголъ $\angle ADE$, въшній чепыреугольника
 $\angle ADCB$ вписаннаго въ кругѣ, равенъ углу
 $\angle CBA$: то и онъ двѣ пятыхъ прямого, и
слѣдовательно равенъ углу $\angle GDH$. Итакъ
поелику треугольниковъ $\triangle EDA$, $\triangle HDG$ рав-
ны взаимно, и углы $\angle EDA$, $\angle HDG$, и углы

DGH , DAE , и стороны DA , DG : слѣдовательно и EA равна HG . Придай обще AG : посему EG равна AH . Ч. и Д. Н.

Отсюда явствуешь, что прямая DE равна радіусу круга. Ибо какъ уголъ DAE равенъ углу DGH , то и DE равна DH *. * 26, 1. Сверхъ того говорю, что EC разсѣчена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи въ D , и большій отрѣзокъ будетъ DE . Ибо ED есть сторона шестиугольника, а DC сторона десятиугольника, и слѣдовательно сіе доказано уже въ Началахъ (137).



ПРИМѢЧАНІЯ

КЪ КНИГАМЪ

О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ,

ИЗМѢРЕНІЮ КРУГА

И ЛЕММАМЪ.



ПРИМѢЧАНІЯ

КЪ КНИГѢ ПЕРВОЙ

О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ.

(1) Изъ опредѣленія 18 книги XI Началь видно, что естли конусъ разсѣченъ плоскостію, чрезъ его ось проходящею; то сѣченіе будетъ треугольникъ, имѣющій уголъ при вершинѣ конуса прямой, когда конусъ прямоугольный: тупой, когда тупоугольный: а острый, когда остроугольный. Слѣдственно, естли конусъ пересѣченъ будетъ плоскостію перпендикулярною къ одной изъ его сторонъ, то, на основаніи извѣстныхъ теоремъ Криволинейной Геометріи (*), въ остроугольномъ будетъ Эллипсисъ, ибо сѣкущая плоскость встрѣтитъ другую сторону подъ вершиною: въ тупоугольномъ Ипербола, ибо встрѣтитъ одну надъ вершиною: а въ прямоугольномъ Парабола, ибо нигдѣ оной не встрѣтитъ, то есть будетъ параллельна къ ней.

По сей причинѣ Архимедъ и прочіе Геометры, бывшіе до Аполлонія, обыкновенно называли, эллипсисъ сѣченіемъ остроугольнымъ, иперболу тупоугольнымъ, а параболу, прямоугольнымъ.

(*) См. Начальныя Основанія чистой Математики, соч. Фурса, части III въ кнѣж. 3.

(2) Архимедъ, подобно Эвклиду и другимъ древнимъ Геометрамъ, называетъ радіусъ *прямою отъ центра*.

(3) Въ подлинникѣ значится: *проведенной отъ вершины отръзка до окружности круга, который есть основаніе отръзка*. Я вездѣ сократилъ подобныя сему выраженія такъ, какъ въ настоящемъ случаѣ.

(4) Есть полусторный шара *ἡμιόλιος ἐστὶ τῆς σφαίρας* значить: есть вполтора раза больше шара, или иначе: равенъ шремъ половинамъ шара.

(5) Вторая часть сего періода въ подлинникѣ весьма темна, повидимому ошъ перемѣнъ сдѣланныхъ переписчиками; но поелику она не составляетъ никакой важности въ отношеніи къ предмету, по я на сѣмъ болѣе останавливаться не буду.

(6) Въ подлинникѣ сказано: *ἀξιώματα*.

(7) Подъ именемъ кривыхъ здѣсь разумѣются не только собственно кривыя, но и ломанныя и смѣшанныя, то есть всѣ тѣ, кои не суть прямыя, или, что все то же, кои не равно лежатъ всѣмъ своими почками.

Собственно кривая есть та линія, которая прѣсѣкается прямою всегда токмо въ почкахъ, или которая съ прямою, на нее какъ ниспѣ падающею, имѣетъ общія почки, но общей части не имѣетъ.

А ломанная есть та линія, которая составлена изъ прямыхъ, впрямъ нележащихъ.

Смѣшенная же, которая часть или нѣкоторыя части суть собственно кривыя, а часть или нѣкоторыя части суть прямыя линіи.

Кривыя линіи могутъ лежать или на тойже плоскости, или нѣтъ. Изъ сихъ послѣднихъ тѣ, кои пресѣкаются плоскостію шокмо въ точкахъ, и слѣдовашельно на ней не могутъ лежать, называются у новыхъ Геометровъ двояко-кривыми. Архимедъ, говоря о кривыхъ, всегда разумѣеть тѣ, кои суть на тойже плоскости.

(8) Пусть, на примѣръ, взята будетъ кривая ABC, (фигура 1) и чрезъ концы ея A, C пусть проведена будетъ неопредѣленная прямая EF; очевидно, что сія кривая ABC падаетъ вся по ту же сторону прямой EF. Но пусть взята будетъ кривая DABC, и чрезъ ея концы D, C пусть проведена будетъ опять неопредѣленная прямая EF; по въ семъ случаѣ кривой часть ABC падаетъ по ту же сторону прямой EF, а часть AD по самой EF, но никакая часть по другую ея сторону не падаетъ.

(9) Для объясненія сего опредѣленія, замѣшимъ съ Пеарардомъ (*), что всякая линія имѣетъ двѣ стороны во всемъ своемъ протяженіи, правую и лѣвую. Такъ въ фиг. 2. кривая ABCDE, простираясь отъ A къ E, правую сторону будетъ имѣть,

(*) Oeuvres d'Archimède, par Peyrard. 1807 pag. 446.

гдѣ $ABCDE$, а лѣвую гдѣ $AbcdE$. Теперь явно, что кривая $ABCDE$ будетъ вся выпукла со стороны $BSCD$, а вогнута со стороны bcd , ибо прямая, проводимая чрезъ ея двѣ точки, всегда падаетъ или со стороны bcd , какъ AE , или нѣкоторая по самой кривой, какъ BE , но ни кошорая со стороны $BSCD$ не падаетъ. Напротивъ того въ фиг. 3. кривая $ABCDE$ не есть выпукла съ тойже стороны, ибо нѣкоторая прямая, проводимая чрезъ двѣ ея точки, падаетъ не по одну сторону. Такъ прямой AE часть AC падаетъ со стороны bc , а часть CE со стороны CD ; и потому часть ея выпукла со стороны B , а часть со стороны d , то есть съ противной.

Изъ сего явствуетъ, что кривую, кошорая выпукла съ тойже стороны, проводимая чрезъ двѣ ея точки и не имѣющія общей съ нею части прямая, пресѣкаетъ токмо въ двухъ точкахъ; а кошорая выпукла не съ тойже стороны, ту могутъ пресѣкать болѣе нежели въ двухъ точкахъ.

(10) Кто понялъ опредѣленія 1 и 2, тому не трудно понять 3 и 4.

(11) Слѣдственно шаровый вырѣзокъ происходитъ чрезъ обращеніе круговаго вырѣзка около радіуса, пока оный возсѣавится тамъ, откуда началось его обращеніе.

(12) Слѣдственно тѣлесный ромбъ происходитъ чрезъ обращеніе треугольника около основанія, при коемъ углы суть острые, пока оный возсѣавится тамъ, откуда началось его обращеніе. При-

чемъ высота шреугольника напишетъ кругъ, который естъ общее основаніе обоихъ конусовъ, составляющихъ ромбъ; а основаніе шреугольника будетъ высота ромба.

Подобно, и ошрѣзокъ шаровый происходитъ чрезъ обращеніе полуошрѣзка круговаго около неподвижной его оси или высоты (*), пока оный возшавшися шамъ, ошкуда началось его обращеніе.

(13) Подъ именемъ Началь или положеній *лабавомена* разумѣются здѣсь шакія предложенія, кои принимаются за истинныя; слѣдователь-но почти то, что называютъ Логикѣ *postulat* или *principium petitionis*; хотя впрочемъ почти очевидная справедливость сихъ предложеній позволяеть допустить оныя какъ общія понятія или аксіомы.

(14) Сіе начало нѣкоторыя неправильно считали за Архимедово опредѣленіе прямой линіи.

(15) Начало сіе и слѣдующія шри, въ отношеніи собственно кривыхъ линій и поверхностей, шщешно разные Геометры доказашъ покушались. Ихъ доказательштва, или скрытно предполагають сіи же начала, а это означаеть доказывать *idem per idem*; или допускають, что кривыя линіи состояшъ изъ безконечно малыхъ прямыхъ линій: вещи уму противныя или непонятныя. Только доказательштва знаменишата Гурьева не имѣ-

(*) Высотою ошрѣзка круговаго называюща перпендикуляръ изъ середины основанія возшавленный, и ограниченный дугою ошрѣзка.

юшь, какъ кажешся, сихъ недоспашковъ, но и оныя едва ли можно назвашь совершенно Геометрическими (*).

(15) Еще менѣе того можно доказашь сіе начало, да и доказывать не нужно, ибо оно есть настоящая аксіома. Спранно, что Пейрардъ думаетъ (**), будшо сіе начало основывается на пр. 1, книги X Эвклида; между тѣмъ когда очевидно, что послѣднее основывается на первомъ. Нѣкоторые еще думаютъ, что сія аксіома есть 4 опредѣленіе книги V Эвклида; но и сіе мнѣніе несправедливо, ибо 4 опредѣленіе основывается токмо на Архимедовомъ началѣ, но со всѣмъ не есть сіе начало, что легко усмотрѣшь какъ изъ самаго сего опредѣленія, такъ и изъ моего примѣчанія*.

(16) По древнѣйшимъ изданіямъ, Архимедъ въ семь и другихъ случаяхъ вмѣсто BA, AL, говоритъ *συμφοτέρος* BAL. Мы почли за удобнѣйшее выражаться такъ, какъ въ Эвклидовыхъ Началахъ.

*13, v. (17) Посему * EG къ GF имѣетъ меньшее отношеніе, нежели CA къ CB. А посему, и проч.

пр. 2. (18) Для сего, продолжи KL (фиг. 4) до N;

3, г. и положи KN равную N ; и изъ K разстояніемъ

*пр. 3. KN напизи кругъ *, который пресѣчетъ прямую

(*) См. Опытъ о усовершенствованіи Элементовъ Геометріи, стр. 239—247.

(**) Oeuvres d'Archimède, pag. 449.

LM въ нѣкоей точкѣ M; и прозяни KM*. И по- *пр. 1.
елику KM равна KN, кошорая равна H; то яв-
стнуеть, что ось K помѣщена прямая KM ра-
вная H*.

*опр. 15, I.

(19) И дѣйствительно, пусть будутъ два тре-
угольника GTN, KLM (фиг. 5). прямоугольные при
T, L; и пусть уголь TGN будетъ меньше угла
LKM. На прямой KL, при точкѣ K, составь уголь
LKR равный углу TGN*. Посему и оспальный уголь *23, I.
GNT равенъ оспальному KRL*. Чего ради шре- *32, I.
угольникъ GTN есть равноугольный треугольнику
KLR: и пошому, какъ NG къ GT, такъ RK къ
KL*. И поелику МК больше KR, и KL есть дру- *4, VI.
гая прямая; а большая величина къ шойже имѣ-
еть большее отношеніе*: посему МК къ KL *8, V.
имѣеть большее отношеніе, нежели KR къ KL.
Доказано же, что какъ NG къ GT, такъ KR къ
KL; посему МК къ KL имѣеть большее отно-
шеніе, нежели и NG къ GT*.

*13, V.

(20) Чего ради QR къ NC шѣмъ паче имѣеть
меньшее отношеніе, нежели A къ B.

(21) Ишакъ, сторона многоугольника описанна-
го къ сторонѣ вписаннаго имѣеть меньшее от-
ношеніе, нежели данныя величины, большая A къ
меньшей B.

(22) А шаже величина къ большей имѣеть мень-
шее отношеніе, нежели къ меньшей*; посему мно- *8, V.
гоугольникъ вписанный къ кругу имѣеть меньшее

отношеніе, нежели къ многоугольнику вписанному; и слѣдовательно тѣмъ паче, и проч.

(23) Какъ то легко вывести изъ доказательствъ 11 предложенія XI книги Началь.

(24) Что доказать можно слѣдующимъ образомъ:

Пусть будетъ кругъ ABC (фиг. 6), коего радиусъ равенъ споронѣ конуса. Составимъ при центрѣ углы и треугольники ADB, BDC, CDA', равные конуса угламъ и треугольникамъ ADB, BDC, *22 и 23, I. CDA*, и еще уголъ CDG равный углу CDB, и протянемъ CG, GA': посему треугольникъ BCD равенъ треугольнику CDG. И поелику два угла *20, XI. ADB, BDC больше угла CDA*; то, по описаніи равныхъ угловъ BDC, CDG, будетъ уголъ ADB больше угла GDA'; посему и треугольникъ ADB *24, I. больше треугольника GDA'*. И такъ треугольники ADB, BDC больше треугольниковъ CDG, GDA'; сии же суть больше треугольника A'DC: слѣдственно тѣмъ паче треугольники ADB, BDC суть больше треугольника CDA'. Подобно докажется, что и каждые другіе два треугольника суть больше остальнаго.

(25) Посему цѣлая коническая поверхность, что между AD, DC, купно съ отрѣзками AEB, BFC, есть больше треугольниковъ ADB, BDC. Но пространство H не меньше тѣхъ отрѣзковъ, по положенію: чего ради, и проч.

(26) Слѣдственно и половина первыхъ прямоугольниковъ больше половины послѣднихъ, то

есть треугольники AED, DEC суть больше треугольниковъ AGE, GEF, FEC.

(27) Судя по излишнимъ повтора́мъ въ семь періодѣ въспрѣчающимся, можно полагать, что переписчики или полковашели сдѣлали въ немъ нѣкоторыя перемѣны.

(28) И дѣйствительно, поелику уголь DBF (фиг. 7) прямой, то DF больше BF. Но BF равна FC, ^{19, 1.} а посему DF больше FC; а посему и треугольникъ DBF больше треугольника FBC*, а шѣмъ паче *1, VI пб, г. больше облегающаго отръзка FBC. Поэтому же и треугольникъ DBG больше отръзка ABG. Чего ради цѣлый треугольникъ DGF больше отръзковъ ABG, CBF, и слѣдовательно больше половины отръзка ADC.

(29) То есть, прямая EK, EL, EM, EN, EO, EP.

(30) И просянушы AB, CD.

Чишашели замѣшаяшъ, что подобныя сему дополненія сдѣлашъ нужно и въ другихъ нѣкоторыхъ предложеніяхъ.

(31) Посему цилиндрическая поверхность, описанная прямыми AC, BD, купно съ отръзками AE, EB, CF, FD, больше параллелограмма ACDB купно съ пространствомъ G; отръзки же суть, по положенію, не больше пространства G: чего ради, и проч.

(32) На основаніи слѣдующаго предложенія:

Ежели первая величина ко второй имѣетъ меньшее отношеніе, нежели третья къ четвертой;

и будетъ первая больше второй, то и третья больше четвертой.

Пусть первая величина A (ф. 8) ко второй B имѣетъ меньшее отношеніе, нежели третья C къ четвертой D ; и пусть будетъ A больше B . Говорю, что и C больше D .

Вообрази величину E , кошорая къ D имѣетъ
 * ак. а, (47). поже отношеніе, что и A къ B *. Ипакъ C къ D

* 13, г. имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ D *: посему C больше E . И поелику A къ B , по положенію, имѣетъ поже отношеніе что и E къ D ,
 * в, г. и A больше B ; посему и E больше D *. Доказано же, что C больше E , слѣдсшвенно тѣмъ паче C больше D .

(33) Ибо треугольники KTD , FRL , имѣя одина-
 * 1, в. кую высоту, суть взаимно какъ основанія TD , RF *;
 по доказанному же въ первой части предложенія, какъ TD къ RF , такъ квадратъ изъ TD къ квадрату изъ G : посему какъ треугольникъ KTD ,
 и проч.

(34) Пусть будетъ A (фиг. 9) центръ основанія конуса, L вершина, ML сторона, а LA ось; и ось A на сторону KN равносшороннаго многоушольника KHF вписаннаго въ основаніи, пусть будетъ

* 12, I. опущень перпендикуляръ AM *; и проводи чрезъ G

* 31, I. параллельную къ ML прямую GN *; и пропши LG : посему LG перпендикулярна къ KN , и слѣдовашельно естъ высота одного изъ треугольниковъ

* опр. 4, VI. пирамиды вписанной въ конусъ*. И поелику GN параллельна къ ML , то треугольникъ NAG естъ

равноугольный треугольнику LMA^* : посему $AM^* 29, г.$ къ ML имѣеть такое отношеніе, что AG къ GN . Но AG къ GN имѣеть большее отношеніе, нежели къ GL^* , ибо GL больше GN : посему и $AM^* 8, г.$ къ ML , то есть C къ D , имѣеть большее отношеніе, нежели AG къ GL^* . А какъ AG къ GL^* , $13, г.$ такъ одинъ треугольникъ многоугольника въ основаніи вписаннаго, къ одному треугольнику вписанному въ конусъ пирамиды, и такъ весь многоугольникъ къ ея поверхности: чего ради C къ D имѣеть большее отношеніе, нежели многоугольникъ вписанный въ кругъ, къ поверхности пирамиды вписанной въ конусъ.

(35) И дѣйствительно, поелику поверхность больше многоугольника вписаннаго въ кругъ B ; то многоугольникъ описанный около круга B къ поверхности пирамиды имѣеть меньшее отношеніе, нежели къ вписанному*. Но поверхность многоуголь- $8, г.$ никъ къ вписанному имѣеть, какъ сказано, меньшее отношеніе, нежели кругъ B къ поверхности конуса: слѣдственно шѣмъ паче многоугольникъ описанный около круга B къ поверхности пирамиды имѣеть меньшее отношеніе, нежели кругъ B къ поверхности конуса; а посему и примененіемъ*. $8, г.$

(36) Нетрудно замѣтить, что Архимедово доказательство есть частное, ибо оно относится только къ тому случаю, когда параллелограммъ CAG будетъ прямоугольный. Общее же доказательство сей леммы есть слѣдующее.

Поелику DF параллельна къ AG , то какъ BA

4, VI. къ AG , такъ BD къ DF^ : посему прямоугольникъ

16, VI. въ BA , DF равенъ прямоугольнику въ BD , AG^ .

Но прямоугольникъ въ BA , DF равенъ прямоуголь-

1, II. никамъ въ BD , DF , и въ AD , DF^ : посему и

прямоугольникъ въ BD , AG равенъ прямоуголь-

никамъ въ BD , DF , и въ AD , DF . Придай общій

прямоугольникъ въ DA , AG : посему прямоуголь-

никъ въ BD , AG купно съ прямоугольникомъ въ

1, II. DA , AG , то есть прямоугольникъ въ BA , AG^ ,

равенъ прямоугольникамъ въ BD , DF и въ AD , DF ,

и еще въ AD , AG , изъ коихъ два послѣдніе рав-

ны прямоугольнику, содержащему въ DA и въ

прямой сложеной изъ DF , AG .

(37) Какъ явствуешь изъ слѣдующаго:

Ежели будутъ при круга такіе, что квадраты изъ радіусовъ двухъ первыхъ равны квадрату изъ радіуса круга шрешьяго; то и первые два круга будутъ равны шрешьему.

Пусть будутъ таковыя круги K , H , L . Говорю, что кругъ L равенъ кругамъ K , H .

Поелику круги K , H суть взаимно какъ квад-

2, XII. раты изъ радіусовъ; то совокупленіемъ, какъ

круги K , H къ кругу H , такъ квадраты изъ

радіусовъ круговъ K , H къ квадрату изъ радіуса

18, V. круга H^ . А и круги H , L суть взаимно какъ

квадраты изъ радіусовъ: посему равномерно,

какъ круги K , H къ кругу L , такъ квадраты изъ

радіусовъ круговъ K , H къ квадрату изъ радіуса

22, V. круга L^ . Но квадраты изъ радіусовъ круговъ K , H

равны квадрату изъ радіуса круга L : посему и

круги K , H равны кругу L .

Подобно докажется естѣли, вмѣсто двухъ круговъ К, Н, будетъ три и болѣе.

(38) Разумѣется: конусы равновысотные цилиндрамъ.

(39) То есть, коего число сторонъ будетъ четное.

(40) Здѣсь и въ нѣкоторыхъ другихъ мѣстахъ выраженіе: *прямая сопрягающія стороны* (*ευθείαι ἐπιχειρύνουσαι τὰς πλευράς*) замѣняю для краткости словомъ: *диагонали*.

(41) По подобію треугольниковъ KHF, SXF.

(42) Ибо, просянувъ GL, СК, поелику углы при К, L прямые*, и АК параллельна къ LE, *31, III. то треугольникъ GLE будетъ равноугольный треугольнику СКА. Посему какъ GL къ LE, такъ СК къ КА. Но какъ GL къ LE, такъ всѣ параллельныя діагонали многоугольника EFGH къ поперечнику FH, а какъ СК къ КА, такъ всѣ параллельныя діагонали многоугольника ABCD къ поперечнику BD круга ABCD*: посему какъ всѣ діагонали многоугольника описаннаго къ поперечнику FH, такъ всѣ діагонали вписаннаго къ поперечнику круга ABCD. И изъ тѣхъ же треугольниковъ, какъ поперечникъ къ сторонамъ, такъ поперечникъ къ сторонамъ: посему равноѣстно, какъ всѣ діагонали многоугольника описаннаго къ его сторонамъ, такъ всѣ діагонали вписаннаго къ его сторонамъ*. *22, V. И потому двухъ прямоугольниковъ, коихъ основанія равны діагоналямъ многоугольниковъ, а вы-

соты равны сторонамъ ихъ, стороны пропорціо-
 опр. 1, VI. нальны: слѣдственно прямоугольники подобны.

(43) Здѣсь предполагается извѣстнымъ слѣдующій вопросъ:

Между двухъ данныхъ прямыхъ найди двѣ среднія равноразнствующія, или что все то же, арифметически пропорціональныя прямая.

Пусть будутъ даны двѣ неравныя прямая АК, CG (фиг. 10), изъ коихъ АК большая. Опниши отъ АК прямую KD равную CG, и оспальную *9, VI. DA разсѣки на три равныя части въ Е, F; и сдѣлай I равную KE, а H равную KF: то явно, что I, H будутъ двѣ искомыя среднія равноразнствующія.

(44) На основаніи слѣдующаго предложенія:

Ежели будутъ четыре равноразнствующія величины, изъ коихъ первая наибольшая; то первая къ четвертой имѣеть отношеніе большее, нежели упроеенное первая ко второй.

Пусть будутъ четыре равноразнствующія величины K, I, H, G (фиг. 11), изъ коихъ K большая, такія, что чемъ разнился K отъ I, тѣмъ I отъ H, и H отъ G. Говорю, что K къ G имѣеть отношеніе большее, нежели упроеенное той же K къ I.

Вообрази величину L, которая къ I имѣеть *акс. а: (49). то же отношеніе, что I къ K*. И поелику K больше I, то I больше L; посему K, L больше *25, V. двукратной I*; а посему, отнявъ обще L, I, будетъ избытокъ K предъ I больше избытка I

предъ L. Но избытокъ K предъ I равенъ избытку I предъ H: посему избытокъ I предъ H больше избытка I предъ L, слѣдственно L больше H. Вообрази еще величину M, которая къ L имѣетъ тоже отношеніе, что L къ I: то опять I, M больше двукрашной L, а шѣмъ паче больше двукрашной H; посему, опнявъ обще M, H, будетъ избытокъ I предъ H, то есть H предъ G, больше избытка H предъ M; слѣдственно M больше G. И поелику K, I, L, M суть непрерывно пропорціональны*; то K къ M есть въ ушроенномъ *опр. b, (43). отношеніи K къ I*. Но K къ G имѣетъ большее *опр. 11, v. отношеніе, нежели къ M*: посему и K къ G *8, v. имѣетъ большее отношеніе, нежели ушроенное величины K къ величинѣ I*.

* 11, v.

(45) Здѣсь и въ нѣкоторыхъ другихъ мѣстахъ подъ именемъ Леммы Архимедъ разумѣетъ, какъ кажется, такія предложенія, кои иногда помѣщались въ Начальныхъ сочиненіяхъ.

(46) Посему фигура описанная къ вписанной имѣетъ меньшее отношеніе, нежели шаръ къ конусу O.

(47) И дѣйствительно, протянувъ AL, получимъ изъ прямоугольныхъ шреугольниковъ HAL*, HAK: *31, III. какъ LH къ HA, такъ AH къ HK*, а посему прямоугольникъ въ LH, HK равенъ квадрату изъ AN*. *с. 8, VI. *17, VI.

Далѣе, вмѣсто: посему явно, что.... круга M, лучше сказать: и потому кругъ равный поверхности фигуры, меньше круга M равнаго квадрату изъ H.

(48) Ибо поверхность произведенная прямою MF , равна кругу, коего радиусъ есть средняя пропорціональная между FM и половиною прямыхъ FG , *17. I. MN^* ; поверхность же произведенная прямою MA , равна кругу, коего радиусъ есть средняя пропорціональная между MA и половиною прямыхъ AB , *19. I. MN . Но FM больше MA^* , и FG больше AB : посему первая средняя пропорціональная больше второй: слѣдственно и кругъ больше круга, то есть поверхность произведенная прямою MF , больше поверхности произведенной прямою MA .

(49) Фигура описанная около вырѣзка, есть также самая что и описанная около опрѣзка, который есть часть того вырѣзка.

(50) Изъ сего слѣдуетъ, что квадраты изъ радиуса круга N больше прямоугольника въ CD , DO . Прямоугольникъ же, и проч.

(51) Посему квадраты изъ радиуса круга N больше квадрата изъ AD ; и кругъ N больше круга, коего радиусъ AD .

(52) Ибо, просянувъ FK , CL , поелику EK параллельна къ AL , и EF къ AC , и уголъ KEF равенъ углу LAC ; то треугольникъ KEF будетъ равноугольный треугольнику LAC . Посему какъ EK къ AL , такъ EF къ AC , такъ и половина EF къ половине AC . Подобно и о діагоналяхъ многоугольниковъ, параллельныхъ къ основаніямъ опрѣзковъ, докажется, что оныя суть взаимно какъ стороны EK , AL . Посему и какъ EK къ AL , такъ всѣ діагонали многоугольника описаннаго,

купно съ половиною основанія EF большаго опрѣзка, ко всѣмъ діагоналямъ вписаннаго, купно съ половиною основанія AC опрѣзка меньшаго*. *11 и 12, V. И пошому двухъ прямоугольниковъ, коихъ основанія равны діагоналямъ многоугольниковъ, купно съ половиною основанія опрѣзковъ, а высоты равны сторонамъ оныхъ, стороны пропорціональны*; *опр. 6, V; и 34, I. слѣдственно прямоугольники подобны. Чего ради какъ прямоугольникъ къ прямоугольнику, то естъ кругъ M къ кругу N^* , такъ квадрашъ изъ EK къ квадрашу изъ AL^* . Но и многоугольники, будучи *20, VI. подобны, сущъ въ опношеніи тѣхъ же квадрашовъ; посему и проч.

(53) Ибо круги M , N сущъ взаимно какъ квадрашы изъ радіусовъ, а по доказанному въ предъидущемъ примѣчаніи, и какъ квадрашы изъ EK и AL : посему квадрашы изъ радіусовъ пропорціональны квадрашамъ изъ EK и AL^* ; а посему EK , *11, V. AL сущъ въ томъже опношеніи, что и радіусы круговъ M , N^* . *22, V.

(54) Посему поверхность фигуры описанной къ поверхности вписанной имѣеть меньшее опношеніе, нежели поверхность опрѣзка къ кругу F^* , *13, V. слѣдственно и претѣненіемъ*. И поелику поверхность, *6, V. и проч.

(55) И вообрази опять фигуры описанную и вписанную посредствомъ тѣхъ многоугольниковъ: то опять поверхность описанной къ поверхности вписанной будетъ имѣть тоже опношеніе, что и многоугольникъ описанный къ многоугольнику

вписанному. Многоугольникъ же къ многоугольнику имѣеть, по положенію, меньшее отношеніе, нежели кругъ F къ поверхности опрѣзка: посему и поверхность фигуры описанной къ поверхности вписанной имѣеть меньшее отношеніе, нежели кругъ F къ поверхности опрѣзка; слѣдственно и применениемъ. Но поверхность фигуры описанной больше круга F : посему и поверхность фигуры вписанной больше поверхности вырѣзка⁺; что нелѣпо.

(56) Такъ же докажется и объ остальной части $AECD$ шара (фиг. 12), которую Архимедъ по же называетъ вырѣзкомъ (въ предл. 3, кн. II), что она равна конусу, имѣющему основаніе равное поверхности шароваго опрѣзка ADC , а высоту равную радіусу шара. Но сіе можно еще доказать короче слѣдующимъ образомъ:

Вообрази конусъ F , коего основаніе равно поверхности шара, а высота равна радіусу онаго:
 36. посему конусъ F равенъ шару^{}. Вообрази еще два конуса G , H равновысошные первому, имѣющіе основаніе, конусъ G равное поверхности опрѣзка ABC , а конусъ H поверхности опрѣзка ADC : то конусъ G будетъ равенъ шаровому вырѣзку *11, XII. AEC , а оба конуса G , H будутъ равны конусу F ^{*}, то есть шару. Слѣдственно, отнявъ конусъ G и равный ему вырѣзокъ AEC , будетъ остальной конусъ H равенъ остальному вырѣзку $AECD$.

КЪ КНИГѢ II.

(57) Сдѣлать шаковый цилиндръ можно различными способами, изъ коихъ самый простой есть слѣдующій.

1. Пусть AQ (фиг. 13) будетъ цилиндръ. Протяжешь его ось или высоту PQ , и сдѣлай QR равную половинѣ PQ , и около того же основанія A , а по высотѣ PR вообрази цилиндръ: то явно, что цилиндръ AR будетъ полупорный цилиндра AQ^* .

* 13, XII.

2. Пусть AQ будетъ конусъ. Раздѣли ось его PQ по поламъ въ S ; и вообрази цилиндръ, имѣющій основаніе A , а высоту PS : то сей цилиндръ будетъ полупорный конуса AQ . Ибо цилиндръ AQ есть прикратный конуса AQ^* , а двукратный цилиндра AS : посему два цилиндра AS равны тремъ конусамъ AQ , слѣдственно цилиндръ AS есть полупорный конуса AQ .

* 10, XII.

(58) Какъ CD къ GH , такъ MN къ EF . Но, изъ положенія, какъ CD къ GH , такъ GH къ MN : посему какъ, и проч.

(59) Желаящіе знать обстоятельно, что разумѣли древніе Геометры подъ словомъ: *данныя*, и какія оныхъ правила, могутъ найсти все сіе въ сочиненіи Евклида подъ заглавіемъ: *Data* (δεδομένα).

(60) Вопросъ, какъ между данныхъ двухъ прямыхъ найсти двѣ среднія пропорціональныя, имѣетъ многія рѣшенія; но въ числѣ ихъ нѣтъ ни одного

основывающагося на Начальной Геометріи, и потому мы на семь останавливаясь не будемъ, шѣмъ болѣе, что нѣкоторыя можно видѣть въ обыкновенныхъ Магематическихъ курсахъ. Замѣшимъ только, что всѣ извѣстные донынѣ рѣшенія можно раздѣлить на три рода: Механическія, то есть находимыя посредствомъ нѣкоторыхъ орудій, Алгебраическія или Арифметическія, и наконецъ Геометрическія, основывающіяся на Высшей Геометріи.

(61) Такъ KL къ EF . Но какъ CD къ MN , то есть, и проч.

(62) Поелику въ треугольникѣ ABC отъ прямаго угла B опущенъ перпендикуляръ BE ; то будетъ, какъ CA къ AB , такъ BA къ AE , и такъ CB къ BE . Посему какъ CA къ AE , такъ квадратъ изъ CA къ квадрату изъ AB , то есть такъ квадратъ изъ CB къ квадрату изъ BE .

(63) Равенъ конусу, коего основаніе кругъ около BF , а высота KN^* . И поелику конусъ, коего основаніе кругъ около BF а высота EK , равенъ двумъ конусамъ, имѣющимъ тоже основаніе, а высоту, одинъ NK а другой EN , ибо конусы, стоящіе на томъ же основаніи, суть взаимно какъ ихъ высоты*: посему, ошнравъ общій конусъ BHF , будетъ остальной конусъ, коего основаніе кругъ около BF а высота KN , равенъ остальной фигурѣ $BHFK$. Но сей конусъ равенъ конусу N : слѣдственно конусъ N , то есть, и проч.

(64) По слѣдующему предложенію:

Ежели двѣ прямыя разсѣчены каждая на двѣ части, имѣющія шже отношеніе; то квадраты изъ цѣлыхъ къ прямоугольникамъ въ частяхъ ихъ будутъ имѣть шже отношеніе, взятыя попеременно.

Пусть будутъ двѣ прямыя KD , AC (фиг. 14) разсѣчены въ H , E такъ, чшобъ KH къ HD имѣла шже отношеніе, что и AE къ EC . Говорю, чшю какъ квадратъ изъ KD къ прямоугольнику въ KH , HD , такъ квадратъ изъ AC къ прямоугольнику въ AE , EC .

Поелику какъ KH къ HD , такъ AE къ EC ; то совокупленіемъ, какъ KD къ DH , такъ AC къ EC^* : посему какъ квадратъ изъ KD къ квадра- * 18, V. шу изъ DH , такъ квадратъ изъ AC къ квадрату изъ CE^* . Еще же, поелику какъ KH къ HD , * 22, VI. такъ прямоугольникъ въ KH , HD къ квадрату изъ HD^* ; а какъ AE къ EC , такъ прямоугольникъ * 1, VI. въ AE , EC къ квадрату изъ EC : посему какъ прямоугольникъ въ KH , HD къ квадрату изъ HD , такъ прямоугольникъ въ AE , EC къ квадрату изъ EC^* ; такожь и преложеніемъ. Доказано же, чшю * 11, V. какъ квадратъ изъ KD къ квадрату изъ HD , такъ квадратъ изъ AC къ квадрату изъ CE : посему, равномерно, какъ квадратъ изъ KD къ прямоугольнику въ KH , HD , такъ квадратъ изъ AC къ * 22, V. прямоугольнику въ AE , EC^* .

(65) Въ примѣч. 47 доказано: чшю квадратъ изъ AD равенъ прямоугольнику въ AB , AC , квадратъ же изъ DB равенъ прямоугольнику въ AB , BC :

посему какъ квадрашъ изъ AD къ квадрашу изъ DB , такъ AC къ BC .

Слѣдственно въ прямоугольномъ треугольникѣ квадрашы изъ споронъ, кои около прямого угла, суть взаимно какъ прилежащіе отрѣзки прешней стороны, на которую изъ прямого угла опущенъ перпендикуляръ.

(66) Въ началѣ сей задачи, въ строеніи было положено: какъ KD , DX къ DX , такъ RX къ XB , а какъ LX къ XD , такъ KB , BX къ BX : посему, отдѣленіемъ и премѣненіемъ: какъ KD къ BR , такъ DX къ XB , и какъ LD къ KB , такъ DX къ XB . Но KD равна KB : посему какъ LD
 *11, V. къ KD , такъ KB къ BR , и такъ DX къ XB *.

(67) По доказанному въ предыдущемъ примѣчаніи, какъ DX къ XB , такъ KB къ BR ; но DX больше BX : посему и KB , то есть BF , больше BR .

(68) Совокупленіемъ и преложеніемъ, какъ DX къ LX , такъ BX къ FX ; а посему равномѣрно,
 *22, V. какъ DL *, и проч.

(69) Сіе доказать можно слѣдующимъ образомъ: Поелику шаръ данъ, то даны его поперечникъ DB и радіусъ KB или BF . Еще же, поелику отношеніе DX къ XB дано, то дано и отношеніе DX , XB къ XB , то есть DB къ XB : посему дана XB , слѣдовательно и XF . Чего ради и отношеніе BF къ FX будетъ данное. Но какъ BF къ FX , такъ LD къ LX : посему и отношеніе

LD къ LX есть данное. При томъ доказано вначалѣ предложенія, что отношеніе LX къ XR дано, слѣдственно дано и отношеніе LR къ LX. Ипакъ, поелику отношеніе каждой изъ прямыхъ RL, LD къ LX дано, то и отношеніе RL къ LD будешь данное: ибо величины, къ тойже имѣющія отношеніе данное, и взаимно имѣють данное.

(70) Ибо доказано, что какъ RL къ LD, такъ квадрашъ изъ KL къ квадрашу изъ LD, и что какъ квадрашъ изъ KL къ квадрапу изъ LD, такъ квадрашъ изъ DB къ квадрапу изъ DX: посему какъ RL къ LD, такъ квадрашъ изъ DB къ квадрапу изъ DX.

(71) Изъ слѣдующей за симъ части доказательствъ не видно, чтобы точка H необходимо падала между B и R; однако сіе иначе быть не можешь, какъ явствуетъ изъ слѣдующаго:

Въ предложеніи 3 доказано, что какъ LK къ KB, такъ KR къ RB (*): посему, премѣненіемъ и совокупленіемъ, какъ LR къ RK, такъ KR къ RB. Но LR къ RX имѣеть большее отношеніе, нежели LR къ RK*: посему LR къ RX имѣеть боль- *8, γ. шее отношеніе, нежели и KR къ RB, то есть FB къ BR*; а посему обращеніемъ, RL къ LX *(55), сл. 2. имѣеть меньшее отношеніе, нежели FB къ FR*. *1, γ. Чего ради FR меньше FH: ибо, по положенію RL къ LX имѣеть шже отношеніе, что BF къ FH.

(*) Разумѣется: относя къ фигурѣ 5 предложенія сію пропорцію 3го: какъ KH къ HC, такъ HD къ DC.

И поелику RL больше LX , то и BF больше FN . Ишакъ точка N падаетъ между B и R , ибо доказано, что FN больше FR , а меньше FB .

(72) Должно замѣшить, что такового рѣшенія, ни на концѣ сей II Книги, ниже въ другомъ какомъ либо мѣстѣ Архимедовыхъ швореній не находишся. Мы не знаемъ нынѣ, занимался ли Архимедъ, какъ здѣсь общаетъ, особенно изслѣдованіемъ сего вопроса, или нѣтъ? но съ достовѣрностію можемъ сказать, что предполагаемаго здѣсь рѣшенія, именно основаннаго на Начальной Геометріи, ему найпи невозможно было: ибо сей вопросъ, равно какъ и прежде упомянутый, о двухъ среднихъ пропорціональныхъ, будучи выраженъ алгебраически, даетъ уравненіе третьей степени, признакъ неоспоримый, что къ разрѣшенію онаго нужно употребить по меньшей мѣрѣ одно изъ такъ называемыхъ коническихъ сѣченій, либо циссоиду Диоклову, и проч. Симъ такожь опровергается мнѣніе тѣхъ, которые думаютъ, что Архимедъ обѣщанное имъ рѣшеніе нашель, но что оно не дошло до насъ.

✓ (73) Докажется же сіе слѣдующимъ образомъ:

Протяни EG , GF , EP , PF ; KL , LN , NO , OK (фиг. 15). И поелику отрѣзки EGF , KLH подобны, то уголь EGF равенъ углу KLH , слѣдственно и половина равна половинѣ, то есть уголь VGF углу ULK ; углы же при V , U суть прямые: посему шреугольникъ VFG есть равноугольный шреугольнику ULK , и будетъ, какъ GV къ

VF , шакъ LU къ UK . Потому же и треугольникъ VFP есть равноугольный треугольнику UKO , и будетъ, какъ VF къ VP , шакъ KU къ UO . Посему, равнобъспно, какъ GV къ VP , шакъ LU къ UO ; и совокупленіемъ, какъ GP къ PV , шакъ LO къ OU . Но какъ SP къ GP , шакъ OR къ LO : посему какъ PS къ PV , шакъ OR къ OU^* ; и совокупленіемъ, какъ PS , PV къ PV , ^{*22, V.} шо есть ZV къ VG , шакъ OR , OU къ OU , шо есть UY къ UL . Доказано же, что какъ GV къ VF , шакъ LU къ UK : посему, равнобъспно, какъ ZV къ VF , шакъ UY къ UK ; а посему и какъ ZV къ EF , шакъ UY къ KN^* . Ишакъ конусовъ ^{*a, V.} EZF , KYN поперечники оснований пропорціональны высотамъ: слѣдспвенно конусы EZF , KYN подобны*.

*оп. 24, XII.

(74) И дѣйствительнo, поелику ошрѣзки даны, шо даны и поперечники ихъ оснований и высоты: посему даны и EV , и квадрашь изъ EV , который равенъ прямоугольнику въ GV , VP . И какъ въ немъ GV дана, шо дана VP : посему и поперечникъ и радіусъ шара суть данные; ибо поперечникъ равенъ даннымъ GV , VP . Ишакъ, поелику PS , PV даны, шо и отношеніе PS къ PV дано: посему и отношеніе PS , PV къ PV , шо есть ZV къ VG , будетъ данное. Но VG дана, посему и ZV дана. А и EF дана: слѣдовательно и отношеніе ZV къ EF есть данное Ч. И Д. Н.

Такъ же докажешся, что и въ ошрѣзкѣ ABC отношеніе XT къ AB есть данное.

(75) Какъ видно изъ примѣчанія 73, гдѣ было доказано, что какъ GV (фиг. 15) къ VP , такъ LU къ UO .

(76) Ибо, протянувъ HC , MN , будетъ, какъ BQ къ QC , такъ QC къ QH : посему какъ BQ къ QH , такъ квадрашъ изъ BQ къ квадрашу

*сл. 2: 20, VI. изъ QC *. Пошому же какъ LR къ RN , такъ квадрашъ изъ LR къ квадрашу изъ RM . Но какъ BQ къ QH , такъ LR къ RN : посему какъ квадрашъ изъ BQ къ квадрашу изъ QC , такъ квадрашъ изъ LR къ квадрашу изъ RM ; а посему и какъ

*22, VI. BQ къ QC , такъ LR къ RM *. Итакъ преуголь-

6, VI. ники QBC , RLM суть равноугольные: посему уголь QBC равенъ углу RLM ; а посему и уголь въ ошрѣзкѣ ABC равенъ углу въ ошрѣзкѣ KLM :

оп. 11, III. слѣдственно ошрѣзки подобны.

(77) И дѣйствительно, поелику DF дана, то и FB дана: посему и прямоугольникъ въ DF , FB , то есть квадрашъ изъ AF , есть данный; а посему данная будетъ AF , слѣдственно и AC .

(78) И дѣйствительно, поелику BD больше DF , и ED есть другая величина; то ED къ DF *8, V. имѣетъ большее отношеніе, нежели ED къ DB *: посему, совокупленіемъ, ED , DF къ DF имѣетъ *1, V. большее отношеніе, нежели ED , BD къ BD *.

(79) Сдѣлано, какъ HL къ LK , такъ ED къ DF ; то совокупленіемъ, какъ и проч.

(80) Ежели A къ B имѣетъ удвоенное, ушроенное, и проч. отношеніе величины C къ D ; то

говорится, что С къ D имѣеть половинное, шрепное, и проч. отношеніе величины А къ В.

Изъ сего явствуетъ, что удвоенное отношеніе половиннаго отношенія А къ В, есть простое отношеніе А къ В, упрощенное шрепнаго отношенія А къ В, есть простое отношеніе А къ В.

Ежели упрощеннаго отношенія величины А къ В возьмется половинное, то называется полушорное, а ежели удвоеннаго шрепное, то двухъ-шрепичное, ишакъ далѣе.

(81) Ибо вообще, ежели къ двумъ неравнымъ величинамъ приложатся равныя или шаже; то большая къ меньшей имѣеть большее отношеніе, нежели сложенная къ сложенной.

Пусть будетъ АВ (фиг. 16) больше CD, а ВЕ равна DF: посему АЕ больше CF. Ишакъ АЕ къ ВЕ имѣеть бѣльшее отношеніе, нежели CF къ ВЕ, то есть къ DF: посему, обращеніемъ, АЕ къ АВ имѣеть меньшее отношеніе, нежели CF къ CD*; слѣдственно преложеніемъ и премѣненіемъ, АВ къ CD имѣеть большее отношеніе, нежели АЕ къ CF*.

*g, v.

(82) По слѣдующей теоремѣ: Ежели будутъ четыре прямыя шакия, что первая ко второй имѣеть меньшее отношеніе, нежели шрепья къ четвертой; то прямоугольникъ въ крайнихъ меньше прямоугольника въ среднихъ.

Пусть будутъ четыре прямыя А, В, С, D (ф. 8) шакия, что А къ В имѣеть меньшее отношеніе,

нежели C къ D . Говорю, что прямоугольникъ въ A , D меньше прямоугольника въ B , C .

Возьми къ шремъ прямымъ A , B , C четвертую пропорціональную E . Ишакъ C къ E имѣеть меньшее отношеніе, нежели C къ D^* : посему D меньше E , и прямоугольникъ въ A , D меньше прямоугольника въ A , E^* . Прямоугольнику же въ A , E равенъ прямоугольникъ въ B , C , ибо A , B , C , E суть пропорціональныя: чего ради прямоугольникъ въ A , D меньше прямоугольника въ B , C .

Подобно докажется, что ежели будутъ три прямая, изъ коихъ первая ко второй имѣеть меньшее отношеніе, нежели вторая къ третьей; то прямоугольникъ въ крайнихъ меньше квадрата изъ средней.

(83) По слѣдующей теоремѣ: Ежели будутъ четыре прямая A , B , C , D такія, что прямоугольникъ въ крайнихъ меньше прямоугольника въ среднихъ; то первая ко второй имѣеть меньшее отношеніе, нежели третья къ четвертой.

Пусть будутъ четыре прямая A , B , C , D (фиг. 8) такія, что прямоугольникъ въ A , D меньше прямоугольника въ B , C . Говорю, что A къ B имѣеть меньшее отношеніе, нежели C къ D .

Возьми къ шремъ прямымъ A , B , C четвертую пропорціональную E . Ишакъ прямоугольникъ въ A , E равенъ прямоугольнику въ B , C : посему прямоугольникъ въ A , D меньше прямоугольника

1 и 2, в. въ A , E , и D меньше E^ ; слѣдственно C къ E

8, в. имѣеть меньшее отношеніе, нежели къ D^ . Но

А къ В имѣтъ тоже отношеніе, что С къ Е :
чего ради А къ В имѣтъ меньшее отношеніе,
нежели С къ D*.

* 13, V.

(84) То какъ НВ къ ВN, такъ ВN къ ВК: по-
сему какъ НВ къ ВК, такъ квадрашъ изъ ВN къ
квадрашу изъ ВК*; и еще, совокупленіемъ и пре- * сл. 2:20, VI.
мѣненіемъ, какъ НN къ NK, такъ ВN къ ВК.
Чего ради какъ квадрашъ изъ НN къ квадрашу
изъ NK, такъ квадрашъ изъ ВN къ квадрашу изъ
ВК*. Доказано же, что какъ квадрашъ изъ ВN * 22, VI.
къ квадрашу изъ ВК, такъ НВ къ ВК: посему,
и проч.

(85) Ибо HF къ FK имѣтъ большее отноше-
ніе, нежели HE, NF къ FK, NF, то есть не-
жели HN къ NK, по доказанному въ прим. 81.

(86) У Архимеда доказательства сего нѣтъ,
но оно легко найши, какъ явствуетъ изъ слѣ-
дующаго:

Ежели будутъ три прямая такія, что квад-
рашъ изъ первой къ квадрашу изъ второй имѣтъ
большее отношеніе, нежели вторая къ третьей;
то первая къ третьей будетъ имѣть отношеніе
большее, нежели полупорное вторая къ третьей.

Пусть будутъ три прямая АВ, С, D (фиг. 17)
такія, что квадрашъ изъ АВ къ квадрашу изъ
С имѣтъ большее отношеніе, нежели С къ D.
Говорю, что АВ къ D имѣтъ отношеніе боль-
шее, нежели полупорное С къ D.

Между С, D возьми среднюю пропорціональную Е.
Итакъ С къ D есть въ удвоенномъ отношеніи

С къ Е. И поелику квадрасть изъ АВ къ квадрату изъ С, то есть удвоенное опношеніе АВ къ С, есть, по положенію, больше опношенія С къ D,

* сл: е, V. по оно больше и удвоеннаго опношенія С къ Е*: посему и АВ къ С имѣеть большее опношеніе, нежели С къ Е. Пущь будетъ какъ Е къ С, шакъ С къ ВF: посему АВ больше ВF. И поелику четыре прямыя ВF, С, Е, D сущь непрерывно пропорціональныя, то ВF къ D есть въ у-

* опр. 11, V. роенномъ опношеніи прямыя ВF къ С*, то есть прямыя С къ Е. Но С къ D есть въ удвоенномъ

* опр. 10, V. опношеніи прямыя С къ Е*, то есть С къ Е есть

* (80). въ половинномъ опношеніи С къ D*: слѣдствено ВF къ D есть въ упроеенномъ опношеніи половиннаго С къ D, то есть въ полуторномъ оп-

* (80). ношеніи С къ D*. Но АВ къ D имѣеть большее опношеніе, нежели ВF къ D: чего ради АВ къ D имѣеть опношеніе большее, нежели полуторное С къ D. Ч. И Д. Н.

Въ предложеніи доказано, что изъ трехъ прямыхъ HF, FK, FG, квадрасть изъ HF къ квадрату изъ FK имѣеть большее опношеніе, нежели KF къ FG: слѣдовательно, по доказанному теперь, HF къ FG имѣеть опношеніе большее, нежели полуторное KF къ FG.

(87) Посему опношеніе опрѣзка BAD къ опрѣзку BCD есть тоже съ сложеннымъ изъ опношенія GH къ HC, и AH къ HC, и AH къ HF.

(88) А посему опношеніе опрѣзка къ опрѣзку есть тоже съ сложеннымъ изъ опношенія прямо-

угольника въ $АН$, $НГ$ къ квадрапу изъ $НС$ и изъ отношенія $АН$ къ $НГ$.

✓(89) Прямоугольникъ въ $ГН$, $НА$ на $НА$, значить, какъ извѣстно, параллелепипедъ, косяго основаніе тошъ прямоугольникъ, а высота $НА$.

(90) Слѣдственно отношеніе опрѣзка къ опрѣзку есть тоже, что и квадрапа изъ $АН$ на $НГ$ къ квадрапу изъ $НС$ на $НГ$. И потому доказати слѣдуетъ, что сіе отношеніе меньше, нежели удвоенное прямая $АН$ къ $НС$.

(91) Поелику кубъ изъ $АВ$ къ кубу изъ $ВС$ имѣеть ✓
упроенное отношеніе стороны $АВ$ къ сторонѣ $ВС$, то $АВ$ къ $ВС$ имѣеть прешичное отношеніе куба изъ $АВ$ къ кубу изъ $ВС$: посему и удвоенное отношеніе $АВ$ къ $ВС$, то есть отношеніе квадрапа изъ $АВ$ къ квадрапу изъ $ВС$, то есть отношеніе поверхности къ поверхности, есть тоже что и полушорное куба изъ $АВ$ къ кубу изъ $ВС$. * (80).
Ч. II Д. Н.

Но изъ подобія шреугольниковъ $АВС$, $АНВ$, какъ $АВ$ къ $ВС$, такъ $АН$ къ $НВ$: посему какъ кубъ изъ $АВ$ къ кубу изъ $ВС$, такъ кубъ изъ $АН$ къ кубу изъ $НВ$ *; слѣдственно отношеніе поверхности къ поверхности есть тоже, что и полушорное отношеніе куба изъ $АН$ къ кубу изъ $НВ$. *37, XI.

(92) Ибо кубъ изъ $АН$ къ кубу изъ $НВ$ имѣеть ✓
отношеніе сложенное изъ отношеній, $АН$ къ $НВ$, и $АН$ къ $НВ$, и $АН$ къ $НВ$, то есть сложенное изъ отношеній квадрапа изъ $АН$ къ квадрапу изъ $НВ$, и $АН$ къ $НВ$.

✓ (93) Поелику какъ АН къ НВ, такъ НВ къ НС: посему отношеніе квадрата изъ АН къ квадрату изъ НВ совокупленное съ отношеніемъ АН къ НВ, есть поже, что отношеніе квадрата изъ АН къ квадрату изъ НВ совокупленное съ отношеніемъ НВ къ НС, то есть съ отношеніемъ квадрата изъ ВН къ прямоугольнику въ ВН, НС. Но и отношеніе квадрата изъ АН къ прямоугольнику въ ВН, НС сложено изъ отношеній, квадрата изъ АН къ квадрату изъ ВН, и квадрата изъ ВН къ прямоугольнику въ ВН, НС: посему отношеніе квадрата изъ АН къ квадрату изъ ВН совокупленное съ отношеніемъ АН къ НВ, есть поже, что и отношеніе квадрата изъ АН къ прямоугольнику въ ВН, НС.

(94) Ибо вообще, ежели будутъ два квадрата или два прямоугольника А, В (фиг. 8) и двѣ прямыя С, D такія, что А къ В имѣеть меньшее отношеніе, нежели С къ D; то параллелепипедъ въ крайнихъ меньше параллелепипеда въ среднихъ, то есть А на D меньше В на С.

Пусть будетъ какъ А къ В, такъ С къ Е: посему D меньше Е, и А на D меньше А на Е.

34. XI. Но А на Е равенъ В на С: посему А на D меньше В на С.

Обратно, ежели помянутыя А, В, С, D будутъ такія, что А на D меньше В на С, то А къ В имѣеть меньшее отношеніе, нежели С къ D.

Пусть будетъ А на Е равенъ В на С: посему *32. XI. А на D меньше А на Е; а посему D меньше Е*,

слѣдственно С къ Е имѣеть меньшее отношеніе, нежели С къ D. Но какъ А къ В, такъ С къ Е: посему и А къ В имѣеть меньшее отношеніе, нежели С къ D*.

*13, v.

(95) Нежели цѣлая къ цѣлой, а шѣмъ паче большее, нежели, и проч.

(96) Поелику KB меньше AK, то и квадраты изъ KB меньше квадрата изъ AK, посему квадраты изъ AK, KB, то есть квадраты изъ AB, меньше двукратнаго квадрата изъ AK.

(97) Ибо, просянувъ радіусъ BQ (фиг. 18), будетъ уголь AQB тупой: посему квадратъ изъ AB больше квадратовъ изъ AQ, QB, то есть больше двукратнаго квадрата изъ радіуса.

(98) Ежели прямая разсѣчена дважды на неравныя; то прямоугольникъ въ наименьшей и въ оспальной части, меньше прямоугольника содержамаго въ другихъ двухъ частяхъ цѣлой прямой.

Пусть прямая AB (фиг. 19) будетъ разсѣчена на неравныя въ C и въ D, такъ что AC, AD суть меньше оспальныхъ BC, BD. Говорю, что прямоугольникъ въ AD, DB меньше прямоугольника въ AC, CB.

Разсѣки AB по поламъ въ E. Ипакъ прямоугольникъ въ AC, CB купно съ квадратомъ изъ CE, равенъ квадрату изъ EB*; и прямоугольникъ въ AD, DB купно съ квадратомъ изъ DE, равенъ тому же квадрату изъ BE: посему прямоугольникъ въ AD, DB купно съ квадратомъ изъ DE, равенъ прямоугольнику въ AC, CB купно съ квад-

(9)
 18.
 19.
 20.
 21.
 22.
 23.
 24.
 25.
 26.
 27.
 28.
 29.
 30.
 31.
 32.
 33.
 34.
 35.
 36.
 37.
 38.
 39.
 40.
 41.
 42.
 43.
 44.
 45.
 46.
 47.
 48.
 49.
 50.
 51.
 52.
 53.
 54.
 55.
 56.
 57.
 58.
 59.
 60.
 61.
 62.
 63.
 64.
 65.
 66.
 67.
 68.
 69.
 70.
 71.
 72.
 73.
 74.
 75.
 76.
 77.
 78.
 79.
 80.
 81.
 82.
 83.
 84.
 85.
 86.
 87.
 88.
 89.
 90.
 91.
 92.
 93.
 94.
 95.
 96.
 97.
 98.
 99.
 100.

рапомъ изъ CE . Но въ нихъ квадрапъ изъ DE
 к, л. больше квадрата изъ CE^ ; ибо DE больше CE :
 посему остальный прямоугольникъ въ AD , DB ,
 меньше прямоугольника въ AC , CB . Ч. И Д. Н.

Отсюда явствуетъ, что при разсѣченіи прямой линіи, прямоугольникъ въ равныхъ частяхъ, то есть квадрапъ изъ половины, будетъ наибольшій.

Иначе. Около AB напиши кругъ; и опъ D , C , E проводи подъ прямыми углами къ AB прямыя DF , CG , EH . Ипакъ прямоугольникъ въ AD , DB равенъ квадрапу изъ DF ; прямоугольникъ въ AC , CB равенъ квадрапу изъ CG ; и прямоугольникъ въ AE , EB равенъ квадрапу изъ EH . Но квадрапъ изъ DF меньше квадрата изъ CG , а сей меньше квадрата изъ EH , который есть наибольшій: посему прямоугольникъ въ AD , DB меньше прямоугольника въ AC , CB , а сей меньше прямоугольника въ AE , EB , то есть квадрата изъ EB , который изъ всѣхъ ихъ есть наибольшій.

(99) Ибо, пропѣнувъ BC , поелику какъ CA къ *сл. 8, г. AB , такъ AB къ AK^* : то квадрапъ изъ AB равенъ прямоугольнику въ AC , AK , то есть двумъ въ CO , AK . Но AB равна EF , и квадрапъ изъ EF равенъ двумъ изъ EL , то есть изъ AR : посему квадрапъ изъ AR равенъ прямоугольнику въ AK , CO .

(100) То есть прямоугольникъ въ AR , RC съ квадрапомъ изъ AR , больше прямоугольниковъ въ AK , KC , и въ AK , CO . Но прямоугольникъ въ AR , RC съ квадрапомъ изъ AR , равенъ прямо-

угольнику въ AR , CA^* ; а прямоугольники въ AK , *3 , II .
 $КС$ и въ AK , $СО$ равны прямоугольнику въ AK , $КО$: посему и проч.

(101) И дѣйствительно, поелику какъ $ОС$ къ $СК$, такъ, по положенію, $МА$ къ AK : то совокупленіемъ, какъ $ОК$ къ $КС$, такъ $МК$ къ $КА$: посему прямоугольникъ въ $ОК$, $КА$ равенъ прямоугольнику въ $МК$, $КС$.

(102) По доказанному въ примѣчаніи 62.

(103) Что квадрашъ изъ AB къ квадрашу изъ BK имѣеть большее отношеніе, нежели $МК$ къ AR : а посему, взявъ половины предыдущихъ членовъ, явствуетъ, что, и проч.

(104) Половина $МК$ къ AR , то есть $МК$, и проч.

(105) Ибо, естли будешь, какъ кругъ около FN къ кругу около BD , такъ AM къ нѣкоей прямой: то сія прямая меньше LN ; и конусъ коего основаніе кругъ около FN , а высота сія меньшая прямая, будешь равенъ конусу MBD , но меньше конуса NHF , слѣдственно и конусъ MBD меньше конуса NHF .

КЪ ИЗМѢРЕНІЮ КРУГА.

(106) И предложеніемъ: посему какъ шреугольники ACE , AEF къ шреугольнику ACD , такъ 21, 1 къ 7*, то есть какъ шреугольникъ ACF , и проч. *24 , V .

(107) А посему какъ шреугольникъ ACF къ чешырекрашному шреугольнику ACD , такъ 22 къ 4жды 7, то есть къ 28.

(108) То есть квадрашъ CG равенъ чешыре-
крашному треугольнику ACD .

(109) Ибо, продолживъ FC къ I (фиг. 20), и
положивъ CI равную FC , и просянувъ EI ,
будеть IE равна FE , и уголь IES равенъ
углу SEF : посему цѣлый уголь FEI равенъ двумъ
шрешнямъ прямого. И поелику всякаго треуголь-
ника всѣ при угла равны двумъ угламъ прямымъ,
шо прочіе углы F , I треугольника FEI равны
чешыремъ шрешнямъ прямого: посему каждый ра-
венъ двумъ шрешнямъ, ибо FE равна EI . Ипакъ
треугольника FEI всѣ углы взаимно равны, слѣдст-
венно и спороны взаимно равны: посему FE
есть двукрашная прямая FC . Чего ради какъ FE
къ FC , шакъ 2 къ 1, или шакъ 306 къ 153: по-
сему какъ квадрашъ изъ FE къ квадрату изъ FC ,
шакъ въ сшепеняхъ 306 къ 153; и посему, ош-
дѣленіемъ, какъ избышокъ квадраша изъ FE предъ
квадратомъ изъ FC къ квадрату изъ FC , шакъ
избышокъ 93636 предъ 23409 къ 23409, шо есть,
какъ квадрашъ изъ ES къ квадрату изъ FC , шакъ
70227 къ 23409; а посему какъ ES къ FC , шакъ
въ корняхъ или линіяхъ 70227 къ 23409. Но ко-
рень числа 70227 есть 265 съ ошпашкомъ 2,
слѣдственнно онъ больше 265, а корень 23409
есть 153: посему корень числа 70227 къ корню
чссла 23409 имѣеть большее отношеніе, нежели
265 къ 153; а посему, и проч.

(110) И поелику, по доказанному, FE къ FC
имѣеть шоже отношеніе, что 306 къ 153, а

ЕС къ ФС имѣеть большее, нежели 265 къ 153;
 то и совокупленіемъ, первая съ пятою къ шпо-
 рой имѣеть большее опношеніе, нежели шрепя
 съ шестью къ чепвертой, по Леммѣ, то есть въ (123).
 FE, ЕС къ ФС имѣеть большее опношеніе, не-
 жели 306 съ 265, то есть 571 къ 153. Доказано
 же, что FE, ЕС къ ФС имѣеть тоже опношеніе,
 что ЕС къ CG: слѣдственно, и проч.

(111) Чего ради квадрашъ изъ ЕС къ квадрапу
 изъ CG имѣеть большее опношеніе, нежели въ
 степеняхъ 571 къ 153; и совокупленіемъ, квадра-
 пы изъ ЕС, CG къ квадрапу изъ CG имѣють боль-
 шее опношеніе, нежели въ степеняхъ 571, 153
 къ 153. Но квадрапы изъ ЕС, CG равны квадра-
 пу изъ EG, а въ степеняхъ числа 571, 153, то
 есть числа 326041, 23409, равны числу 349450:
 посему квадрашъ изъ EG къ квадрапу изъ CG
 имѣеть большее, и проч.

(112) И пошому. EG къ CG имѣеть большее
 опношеніе, нежели корень числа 349450 къ кор-
 ню числа 23409. Поелику же корень числа 349450
 есть $591\frac{1}{3}$ съ ошашкомъ $21\frac{1}{3}\frac{4}{13}$, а числа 23409
 есть 153; то корень перваго къ корню другаго
 имѣеть большее опношеніе, нежели $591\frac{1}{3}$ къ
 153: а посему, и проч.

(113) Опять, сходно съ предъидущимъ, докажет-
 ся, что изъ шреугольника GEC будетъ, какъ
 GE, ЕС къ GC, такъ SE къ SH; и по причинѣ,
 что ЕС къ GC имѣеть большее опношеніе, не-
 жели 571 къ 153, а GE къ GC большее, нежели

$591\frac{1}{8}$ къ 153, будешь ЕС, GE, къ GC имѣть большее, нежели 571, $591\frac{1}{8}$ къ 153: и пошому ЕС, и проч.

(114) Чего ради, сходно съ прежнимъ, и квадраты изъ ЕС, НС къ квадрату изъ НС имѣють большее отношеніе, нежели въ степеняхъ $1162\frac{1}{8}$ съ 153 къ 153, или квадраты изъ ЕН къ квадрату изъ НС имѣеть большее, нежели $1373943\frac{1}{2}\frac{1}{64}$ къ 23409; а посему ЕН къ НС имѣеть большее отношеніе, нежели $1172\frac{1}{2}$ къ 153: ибо корень числа $1373943\frac{1}{2}\frac{1}{64}$ есть $1172\frac{1}{2}$ съ ошпашкомъ $66\frac{1}{2}$.

(115) Нежели $1162\frac{1}{8}$, $1172\frac{1}{8}$ къ 153, что докажется какъ и прежде, и слѣдовательно большее, нежели, и проч.

(116). Чего ради сходно съ прежними случаями, квадраты изъ ЕС, СК, то есть квадраты изъ ЕК къ квадрату изъ КС будетъ имѣть большее отношеніе, нежели въ степеняхъ $2334\frac{1}{4}$, 153, то есть $5472132\frac{1}{16}$, къ 23409; а посему ЕК къ КС имѣеть большее, нежели $2339\frac{1}{4}$ къ 153: ибо корень числа $5472132\frac{1}{16}$ есть $2339\frac{1}{4}$ при ошпашкѣ $41\frac{1}{2}$.

(117) И дѣйствительно, поелику какъ АС къ СВ, такъ, по доказанному прежде, 2 къ 1 и такъ 1560 къ 780; и какъ квадраты изъ АС къ квадрату изъ СВ, такъ въ степеняхъ 1560 къ 780: посему опредѣленіемъ, какъ квадраты изъ АВ къ квадрату изъ СВ, такъ 1825200 къ 608400, а посему какъ АВ къ ВС, такъ въ корняхъ 1825200 къ 608400. Поелику же корень числа 1825200 есть 1351 съ

недостаткомъ 1, и слѣдовательно онъ меньше числа 1351, а корень числа 608400 есть 780; то корень числа 1825200 къ корню числа 608400 имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 1351 къ 780: посему и АВ къ ВС имѣетъ меньшее, нежели 1351 къ 780.

(118) Доказано же, что СА къ ВС имѣетъ тоже отношеніе, что 1560 къ 780, и АВ къ ВС имѣетъ меньшее, нежели 1351 къ 780; слѣдственно, по леммѣ, СА, АВ къ ВС имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 1560, 1351 къ 780, то есть, нежели 2911 къ 780: чего ради, и проч.

(119) И потому квадраты изъ АГ, ГС, то есть квадратъ изъ АС къ квадрату изъ ГС имѣетъ меньшее, нежели 9082321 къ 608400, и, по причинѣ что корень числа 9082321 есть $3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ съ недостаткомъ $368\frac{1}{16}$, АС къ СГ, и проч.

(120) То есть послѣднія два числа получаются, умноживъ оба первыя на 4, и раздѣливъ на 13.

(121) Ибо 2911 съ $3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ дѣлаетъ $5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}$; квадраты же изъ АН, НС равны квадрату изъ АС; а въ степеняхъ числа 1823, 240 равны числу 3380929, коего корень есть $1838\frac{9}{11}$ при недостаткѣ почти 323.

(122) Потому, что въ степеняхъ числа 1007, 66 равны числу 1018405, коего корень есть $1009\frac{5}{6}$ при недостаткѣ $12\frac{1}{3}\frac{1}{36}$.

(123) Потому опять, что въ степеняхъ числа

2016 $\frac{1}{8}$, 66 дають число 4069284 $\frac{1}{32}$, коего корень есть 2017 $\frac{1}{4}$ съ недоспашкомъ почши 13 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{29}$.

(124) Ибо 6336 раздѣленное на 2017 $\frac{1}{4}$ дастъ 3 $\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}$, а $\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}$ значить тоже что $\frac{1137}{8069}$ или

$\frac{11370}{80690}$; или, раздѣливъ оба члена на 1137, будетъ

$\frac{10}{70\frac{1100}{1137}}$, дробь, которая больше нежели $\frac{10}{71}$.

ЛЕММА. Если первая величина ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели третья къ четвертой, и пятая ко второй имѣеть большее, нежели шестая къ четвертой: то и совокуплено, первая съ пятою ко второй будетъ имѣть большее отношеніе, нежели третья съ шестою къ четвертой.

Пусть будутъ шесть величинъ АВ, С, DE, F, BG, EH (фиг. 21) такія, что АВ къ С имѣеть большее отношеніе, нежели DE къ F, и BG къ С имѣеть большее, нежели EH къ F. Говорю, что и совокупленно, AG къ С имѣеть большее отношеніе, нежели DH къ F.

Вообрази величину ВК, которая къ С имѣеть тоже отношеніе, что DE къ F: почему ВК меньше АВ*. Вообрази еще величину ВL, которая къ С имѣеть тоже отношеніе, что EH къ F: посему ВL меньше BG.

Итакъ, поелику первая ВК ко второй С имѣеть тоже отношеніе, что третья DE къ четвертой F, и пятая ВL ко второй С имѣеть тоже

опношеніе, что шестая ЕН къ четвертой F; по и совокупленно, первая съ пятою, то есть KL, ко впорой С имѣеть поже опношеніе, что и претья съ шестою, то есть ДН, къ четвертой F*. Но AG къ С имѣеть большее опношеніе, нежели KL къ С*: посему AG къ С имѣеть *24, γ. большее опношеніе, нежели и ДН къ F.

Естьлибы АВ къ С имѣла поже опношеніе, что DE къ F; а BG къ С имѣла большее, нежели ЕН къ F: то подобно докажешся, что AG къ С имѣеть большее опношеніе, нежели ДН къ F, взявъ величину BL такую, копорая бы къ С имѣла поже опношеніе, что и ЕН къ F.

Желая познакомить съ симъ весьма важнымъ предложеніемъ (ш. е. III) даже и шѣхъ изъ чисташелей, кои не могли, или просто нехотѣли вникнуть въ теорію величинъ пропорціональных Эвклида, я помѣщу здѣсь доказательство онаго, облеченное въ формулы уравненій (*).

Всякаго круга окружность равна премоу его поперечникамъ съ избыткомъ, копорый меньше

(*) Названіе уравненія принимается здѣсь въ общемъ значеніи, то есть, подъ онымъ разумѣются и такъ называемыя неравенства, копорыя (мимоходомъ замѣтимъ) издатели пространныхъ курсовъ столь же несправедливо исключаютъ изъ правилъ уравненій, какъ и неравныя отношенія изъ правилъ пропорцій.

нежели седмая часть, а больше нежели десять семьдесятъ первыхъ поперечника.

Пусть будетъ кругъ, коего поперечникъ АС и центръ Е. Отъ Е поставь перпендикулярный къ АС другой поперечникъ; и раздѣли одинъ изъ прямыхъ угловъ, кои при центрѣ, на три равныя части, и пусть одна часть будетъ уголъ СЕГ; и проведи касательную въ С къ кругу прямую МСF; и раздѣли по поламъ уголъ FЕС прямою ЕG, уголъ GЕС прямою ЕН, уголъ НЕС прямою ЕК, и наконецъ уголъ КЕС прямою ЕL; и сдѣлай уг. СЕМ=уг. СЕL.

Положимъ EF = a, FC = b, EG = a', CG = b', ЕН = a'', СН = b'', ЕК = a''', СК = b''', ЕL = a''''', CL = b'''''; и еще ЕС = r, АС = 2r = 2d, и окружность круга = Q.

Поелику въ прямоугольномъ треугольникѣ СЕF уголъ СЕF есть третья часть прямого; то, по доказанному нами, будетъ EF : FC :: 2 : 1 :: 306 : 153, или a : b :: 306 : 153,

то есть
$$\frac{a}{b} = \frac{306}{153}$$

Припомъ, изъ пропорціи a : b :: 306 : 153 слѣдуетъ, что a² : b² :: 306² : 153², то есть 93636 : 23409; посему a² — b² : b² :: 93636 — 23409 : 23409, то есть r² : b² :: 70227 : 153²; слѣдственно 153².r² = 70227.b², и 153 r = b √(70227). Но √(70227) = 265 при небольшомъ остаткѣ: посему 153 r > 265 b,

а посему
$$\frac{r}{b} > \frac{265}{153}.$$

И поелику шреугольника FEC уголь FEC раздѣленъ по поламъ; шо $EF:EC::FG:GC$, шо есть $a:r::b-b':b'$, посему совокупленіемъ, $a+r:r::b:b'$, и премѣненіемъ, $a+r:b::r:b'$,

чего ради
$$\frac{a+r}{b} = \frac{r}{b'}.$$

Доказано же, что $\frac{a}{b} = \frac{306}{153}$, а $\frac{r}{b} > \frac{265}{153}$, посему $\frac{a+r}{b} > \frac{306+265}{153}$, шо есть $> \frac{571}{153}$,

а посему
$$\frac{r}{b'} > \frac{571}{153}$$

Отсюда найдешся $\frac{r^2}{b'^2} + 1 > \frac{571^2}{153^2} + 1$, или $\frac{r^2+b'^2}{b'^2}$,

шо есть $\frac{a'^2}{b'^2} > \frac{349450}{153^2}$. Но корень числа 349450

есть $591\frac{1}{8}$ при остаткѣ $21\frac{5}{64}$:

посему
$$\frac{a'}{b'} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}.$$

Точно такимъ же образомъ и изъ шреугольника GEC найдешся, что

$$\frac{a'+r}{b'} = \frac{r}{b''};$$

а поставивъ на мѣсто $\frac{a'}{b'}$, $\frac{r}{b'}$ числа прежде най-

денныя, будешъ $\frac{a'+r}{b'} > \frac{571+591\frac{1}{8}}{153}$:

посему и
$$\frac{r}{b''} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}.$$

Отсюда же, сходно съ прежнимъ, найдется

$$\frac{r^2 + b'^2}{b'^2} \text{ по есть } \frac{a'^2}{b'^2} > \frac{1373943 \frac{1}{2} \frac{1}{64}}{153^2},$$

$$\text{и} \quad \frac{a''}{b''} > \frac{1172 \frac{1}{8}}{153}:$$

ибо корень числа $1373943 \frac{1}{2} \frac{1}{64}$ есть $1172 \frac{1}{8}$ при остаткѣ $66 \frac{1}{2}$.

Равнымъ образомъ и изъ треугольника НЕС выдеть

$$\frac{a'' + r}{b''} = \frac{r}{b'''};$$

$$\text{и попомъ } \frac{a'' + r}{b''}, \quad \text{или}$$

$$\frac{r}{b'''} > \frac{2334 \frac{1}{4}}{153};$$

Отсюда же, такожь по прежнему будетъ $\frac{r^2 + b'''^2}{b'''^2}$

$$\text{по есть } \frac{a'''^2}{b'''^2} > \frac{5472132 \frac{1}{16}}{153^2},$$

$$\text{по сему} \quad \frac{a'''}{b'''} > \frac{2339 \frac{1}{4}}{153}:$$

ибо корень числа $5472132 \frac{1}{16}$ есть $2339 \frac{1}{4}$ при остаткѣ $41 \frac{1}{2}$.

Напоследокъ, изъ треугольника КЕС такъ же найдется

$$\frac{a'''' + r}{b''''} = \frac{r}{b'''''},$$

$$\text{а отсюда } \frac{r}{b'''''} > \frac{4673 \frac{1}{2}}{153}, \quad \text{и} \quad \frac{d}{2b'''''} > \frac{4673 \frac{1}{2}}{153}.$$

Итакъ, поелику уголь FES, который есть третья часть прямого, разделенъ четыре раза по поламъ; то уголь LEC есть $\frac{1}{48}$ а уголь LEM $\frac{2}{24}$ или $\frac{4}{96}$ прямого: слѣдственно LM или $2b''''$ будетъ сторона девяностошестиугольника описаннаго; а $96.2b''''$ будетъ очертаніе онаго.

И какъ, по доказанному, $\frac{d}{2b''''} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$, посему

$$\frac{d}{96.2b''''} > \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}, \text{ а посему } 96.2b'''' < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} d.$$

Но $O < 96.2b''''$, то есть окружность круга меньше девяностошестиугольника описаннаго; по-

сему шѣмъ паче $O < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} d.$

А $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} = 3 \frac{1}{7} \frac{2}{1335};$ итакъ шѣмъ

паче $O < 3 \frac{1}{7} d,$

то есть окружность круга меньше нежели его при поперечника съ седмою онаго частію.

Пусть опять будетъ кругъ, его поперечникъ AC, и уголь BAC третья часть прямого. Раздѣли опять по поламъ уголь BAC прямою AG, уголь GAC прямою AH, уголь HAC прямою AK, и наконецъ уголь KAC прямою AL; и просяни CB, CG, CH, CK, CL.

Означимъ прямыя AB, AG, AH, AK, AL чрезъ a, a', a'', a''', a'''', а CB, CG, CH, CK, CL чрезъ b, b', b'', b''', b'''', и поперечникъ AC чрезъ d.

И такъ, сходно съ предыдущимъ, будетъ $AC:BC :: 2:1 :: 1560:780$, или $d:b :: 1560:780$,

то есть
$$\frac{d}{b} = \frac{1560}{780}.$$

Пришомъ, изъ пропорціи $d:b::1560:780$ слѣдуетъ, что $d^2:b^2::2433600:608400$; посему $d^2 - b^2 : b^2$, или $a^2 : b^2 :: 1825200 : 780^2$; слѣдственно

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{(1825200)}}{780}. \text{ Но } \sqrt{(1825200)} \text{ есть } 1351; \text{ по-}$$

сему
$$\frac{a}{b} < \frac{1351}{780}.$$

И послѣку уголь BAG равенъ какъ углу GCB такъ и углу GAC , то уг. $GCB = \text{уг. } GAC$, и уголь AGC есть общій треугольникамъ AGC , CGF : слѣдственно сін треугольники равноугольны и подобны, и будетъ $AG:GC::CG:GF::AC:CF$. Сверхъ того, поелику треугольника BAC уголь BAC раздѣленъ по поламъ, то $AB:AC::FB:CF$; посему $AB+AC:AC::BC:CF$, и $AB+AC:BC::AC:CF$. Доказано, что $AG:GC::AC:CF$: посему $AG:GC::AB+AC:BC$, то есть $a':b'::a+d:b$;

чего ради
$$\frac{a+d}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Доказано же, что $\frac{d}{b} = \frac{1560}{780}$, а $\frac{a}{b} < \frac{1351}{780}$;

посему
$$\frac{a+d}{b} < \frac{2911}{780},$$

а посему
$$\frac{a'}{b'} < \frac{2911}{780}.$$

Отсюда найдемъ $\frac{d^2 + b'^2}{b'^2}$ или $\frac{d^2}{b'^2} < \frac{9082321}{780^2}$.

Но корень числа 9082321 есть $3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ при недостаткѣ $368\frac{1}{16}$;

поэтому $\frac{d}{b'} < \frac{3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{780}$.

Точно такимъ же образомъ отъ треугольника AGC найдемъ, что

$$\frac{a' + d}{b'} = \frac{a''}{b''};$$

а поставивъ на мѣсто $\frac{a'}{b'}$, $\frac{d}{b'}$, числа прежде

найденныя, будемъ $\frac{a' + d}{b'} < \frac{5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{780}$, или, умно-

живъ сей дроби оба члена на $\frac{4}{13}$, $\frac{a' + d}{b'} < \frac{1823}{240}$;

поэтому и $\frac{a''}{b''} < \frac{1823}{240}$.

Отсюда же, сходно съ прежнимъ, найдемъ

$$\frac{a''^2 + b''^2}{b''^2} \text{ или } \frac{d^2}{b''^2} < \frac{3380929}{240^2},$$

и $\frac{d}{b''} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$;

ибо корень числа 3380929 есть $1838\frac{9}{11}$, при недостаткѣ почти 323.

Равнымъ образомъ отъ треугольника HAC вы-

демъ $\frac{a'' + d}{b''} = \frac{a'''}{b'''}$,

а попомъ $\frac{a'' + d}{b''}$ или $\frac{a'''}{b'''} < \frac{3661\frac{9}{11}}{240}$, или, ум-

поживъ сей дроби оба члена на $\frac{11}{40}$,

$$\frac{a'''}{b'''} < \frac{1007}{66}.$$

Отсюда же, пакожь по прежнему, будетъ

$$\frac{a'''^2 + b'''^2}{b'''^2}, \text{ то есть } \frac{d^2}{b'''^2} < \frac{1018405}{66^2},$$

посему
$$\frac{d}{b'''} < \frac{1009\frac{1}{2}}{66}:$$

ибо корень числа 1018405 есть $1009\frac{1}{2}$ при недоспашкѣ $12\frac{1}{3}\frac{1}{36}$.

Напослѣдокъ, ошъ преутольника КАС такъ же найдется

$$\frac{a''' + d}{b'''} = \frac{a''''}{b''''},$$

и пошомъ
$$\frac{a''' + d}{b'''} \text{ или } \frac{a''''}{b''''} < \frac{2016\frac{1}{2}}{66}, \text{ а отсюда}$$

$$\frac{a''''^2 + b''''^2}{b''''^2}, \text{ то есть } \frac{d^2}{b''''^2} < \frac{4069284\frac{1}{36}}{66^2},$$

а
$$\frac{d}{b''''} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}:$$

ибо корень числа $4069284\frac{1}{36}$ есть $2017\frac{1}{4}$ при недоспашкѣ почти $13\frac{1}{2}\frac{1}{29}$.

И такъ, поелку уголь LEC есть $\frac{1}{48}$ прямого; то уголь при цешпрѣ, спягиваемый прямою LC есть $\frac{2}{48}$ или $\frac{4}{96}$ прямого: слѣдственно прямая LC или b'''' будетъ спорона девяноспошести-

угольника вписаннаго, а $96b''''$ будетъ очерпаніе онаго. И какъ, по доказанному $\frac{d}{b''''} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$, посему

$$\frac{d}{96b''''} < \frac{2017\frac{1}{4}}{6336}, \text{ а посему } 96b'''' > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} d.$$

Но $O > 96b''''$, то есть окружность круга больше девяностошестнугольника вписаннаго; посему тѣмъ паче

$$O > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} d.$$

$$A \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} = 3 \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} = 3 \frac{1137}{8069} = 3 \frac{11370}{80690} = 3 \frac{10}{70\frac{1100}{1137}},$$

то есть $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < 3 \frac{10}{71}$; итакъ тѣмъ паче

$$O > 3 \frac{10}{71} d,$$

то есть окружность круга больше, нежели при его поперечника и десять семьдесятъ первыхъ онаго частей.

Доказано же, что она меньше нежели при поперечника съ седьмою онаго частію: слѣдовательно всякаго круга окружность равна, и проч. Ч. И Д. Н.

Поелику же окружность заключается между $3\frac{1}{7}d$ и $3\frac{10}{71}d$, коихъ разность весьма мала; то, принявъ, что $O = 3\frac{1}{7}d$, будетъ

$$7 : 22 :: d : O,$$

то есть, окружность круга къ поперечнику имѣетъ отношеніе, почти какъ 22 къ 7.

КЪ ЛЕММАМЪ.

(125) Но пусть два круга ABE , DCE (табл. 7) взаимно касаются внѣ, въ точкѣ E ; и пусть опять ихъ поперечники DC , AB будутъ взаимно параллельны, и пропаянутся DE , EB . Говорю, что DEB есть прямая.

Пусть опять будутъ F , G центры круговъ; и пропаяни прямую FG ; которая необходимо прой-
 12, III. деть чрезъ E^ . И поелику DC параллельна къ AB , то уголъ DGE равенъ углу EFB : посему равнобедренныхъ треугольниковъ DGE , EFB углы GDE , GED , равные взаимно, равны угламъ FEB , FBE ; а посему и уголъ GED равенъ углу FEB . Придай обще уголъ BEG : посему углы GED , GEB равны угламъ FEB , BEG . Но углы FEB , BEG равны двумъ угламъ прямымъ: посему и углы DEG , GEB равны двумъ прямымъ. Чего ради DEB

14, I. есть прямая.

(126) И дѣйствительно, поелику углы DBG , DGB равны прямому, также и углы BCD , CBD ; то углы DBG , DGB равны угламъ BCD , CBD . Но въ нихъ уголъ CBD , то есть BCE , равенъ углу DBG , то есть BAE , ибо AB равна BC : посему остальной уголъ DGB равенъ остальному DCB ; а посему BG равна BC . Чего ради треугольникъ GBD равенъ треугольнику DBC : слѣдственно GD равна DC .

(127) Сочиненіе сіе не дошло до насъ.

(128) И дѣйствительно, поелику какъ AD къ DC , такъ AF къ FE ; и какъ GD къ AD , такъ CF

къ AF^* : то равномѣстно, какъ GD къ DC , такъ *4, VI. CF къ FE . Но GD равна DC : посему и CF равна FE^* . *22, V.

(129) Такъ доказано сіе предложеніе въ Арабскомъ переводѣ. Торелли, замѣшивъ (*), что здѣсь говорится объ особенномъ случаѣ, полагаетъ, что въ Греческомъ подлинникѣ было доказательство общее, каково слѣдующее:

Пусть будетъ полукружіе CBA , къ которому касающіяся DC , DB ; и пусть будетъ BE перпендикулярна къ AC , и прозянуша AD . Говорю, что BF равна FE .

Протяни AB ; и продолжи оную и CD , пока встрѣятся какъ въ I ; возьми полукружія центръ G ; и проводи GB , и чрезъ B проводи параллельную къ AC прямую BH . И поелику уголъ EBH равенъ углу GBD^* ; то, опнявъ общій уголъ EBD , * акс. 10. будетъ остальной уголъ DBH равенъ остальному GBE . А и уголъ IBH равенъ углу ABG , ибо каждый равенъ углу IAC^* : посему уголъ IBD , * 5 и 29, I. сложенный изъ двухъ DBH , IBH , равенъ углу ABE , сложенному изъ двухъ GBE , ABG . Но и уголъ BID равенъ углу ABE : слѣдственно уголъ IBD равенъ BID ; чего ради BD равна ID^* . Но BD * 6, I. равна DC : посему и ID равна DC^* . Сверхъ того, *2, III. поелику BE параллельна къ IC : то какъ AD къ AF , то естьъ какъ ID къ BF , такъ DC къ FE . Но ID равна DC : посему и BF равна FE^* . Ч. И. Д. Н. *14, V.

(*) *Archimedis quæ supersunt omnia. Præfat. pag. XIX.*

(130) Квадратамъ изъ DB , AD , DC и прямоугольнику въ AD , DC , то есть двукратному, и проч.

(131) Для доказательства сего, должно предварительно знать слѣдующее предложеніе:

Ежели въ треугольникъ ABD , отъ вершинъ A , B двухъ угловъ, проведутся перпендикулярныя къ сторонамъ BD , AD , прямая AI , BF , встрѣчающія взаимно въ E , а отъ вершины D третьяго угла до E просянуша будетъ прямая DE , и продолжена, пока встрѣтитъ третью сторону въ нѣкоей точкѣ C : то и DC будетъ перпендикулярна къ AB .

Около AB напиши кругъ, то окружность его пройдетъ чрезъ точки F , I , ибо углы при нихъ суть прямые; и около DE напиши также кругъ, то и его окружность пройдетъ чрезъ F , I ; и просяи FI . Поелику уголъ EDI равенъ углу EFI , ибо суть въ томъ же оцрѣзкѣ; и уголъ BFI равенъ углу BAI : посему уголъ BAI равенъ углу BDC . Но уголъ при B есть общій треугольникамъ BAI , BDC : посему оспальный уголъ AIB , который есть прямой, равенъ оспальному BCD . Итакъ DC перпендикулярна къ AB .

Изъ сего слѣдуетъ, что еслии отъ трехъ угловъ треугольника проведутся къ сторонамъ перпендикуляры: то всѣ они пресѣкутся въ одной точкѣ.

Теперь докажемъ предложеніе, предполагаемое Архимедомъ, а именно:

Ежели опъ концовъ D, B двухъ прямыхъ AD, AB , дѣлающихъ уголь, опускаются опъ одной на другую перпендикуляры DC и BF , и еще на проведенную AE и продолженную опущенныя опъ одного конца B перпендикулярная BI ; и пропшянешся DI : то BD будетъ прямая.

Ибо, естли не такъ, то пусть будетъ DGB прямая. Итакъ уголь BGA , по предыдущему, естъ прямой. Но и уголь BIG прямой, по положенію: посему два угла треугольника BGI равны двумъ прямымъ, что невозможно*. Слѣдственно прямая * 17, 1. пропшянушая опъ D до B не пройдетъ, какъ DGB : и пошому будетъ DIB .

(132) Изъ подобія треугольниковъ ADC, DHE , въ конхъ HE параллельна къ AC .

(133) Слѣдовашельно сіе предложеніе можно доказать вообще.

(134) Предложеніе, упоминаемое здѣсь, можно доказать слѣдующимъ образомъ:

Пусть будетъ чешыреугольникъ $ABDC$, коего сторона AB равна сторонѣ AC , и уголь BDC равенъ двумъ угламъ ABD, ACD . Говорю, что AD равна AB или AC .

Продолжи CA до E , и сдѣлай AE равную AC , и пропшяни EB . Поелику AE равна AB , то уголь AEB равенъ углу ABE : итакъ уголь BDC съ угломъ AEB равенъ шремъ угламъ DCA, DBA, ABE , то естъ двумъ угламъ DCA, DBE . Но чешыре угла всякаго чешыреугольника равны чешыремъ

прямымъ: посему каждые два противулежащіе угла чепыреугольника $BDCE$ равны двумъ прямымъ; а посему около чепыреугольника $BDCE$ можно описать кругъ (*). Опиши оный. II послѣку отъ почки A , внутри сего круга лежащей, проведенны три прямая AC , AB , AE взаимно равныя; по A *9, III. есть центръ круга*: посему AD равна AB или AC .

(135) Ибо уголъ при центрѣ составляетъ пятую часть чепырехъ угловъ прямыхъ.

(136). Послѣку полукружіе содержишь пять дугъ равныхъ CD ; по уголъ BDC спонѣ на шести шаковыхъ дугахъ, слѣдственио онъ шесшикрапный угла CBD , по есть шесшикрапный пятон части прямого, по есть равенъ шести пятыхъ прямого.

(137) Въ 9 предложеніи XIII книги, копорая еще не переведена на Россійскій языкъ.

(*) Нач. О. Чис. М. Фусса. Ч. II. § 165.

СОДЕРЖАНІЕ ПРЕДМѢТОВЪ.

Предисловіе, въ коемъ показаны шворенія Архимеда и главныя обстоятельство его жизни. спран. I.

О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ. Книга I.

Письмо Архимеда къ Доскеею о предметѣ сей книги. I.

Опредѣленія.

1. Кривыя линіи, оканчивающіяся на плоскости, суть тѣ, которыя вразсужденіи прямыхъ, концы ихъ соединяющихъ, суть или совсѣмъ по одну ея сторону, или ни сколько по другую не падають. 3.

2. Кривая вогнушою съ одной и той же стороны называется та, на копорой чрезъ какія ниесть двѣ почки пропягиваемыя прямыя падають или всѣ по оную сторону, или шокмо нѣкоторыя, а другія по самой кривой, но ни копорая по другую не падаеть. 4.

3. Кривыя поверхности, оканчивающіяся на плоскости, суть тѣ, кои, будучи внѣ плоскости, имѣють края свои на ней, и вразсужденіи сей плоскости суть или совсѣмъ по одну ея сторону, или ни сколько по другую не падають. 4.

4. Кривая поверхность вогнушою съ одной и той же стороны называется та, на копорой чрезъ какія ниесть двѣ почки пропягиваемыя прямыя падають или всѣ по оную сторону, или шокмо нѣкоторыя, а другія по самой поверхности, но ни копорая по другую не падаеть. 4.

5. Тѣлеснымъ вырѣзкомъ называется фигура, содержащая въ поверхности конуса, когда онъ пресѣкаеть шаръ, имѣя вершину при его центрѣ, и въ поверхности шара ошнимаемой конусомъ. 5.

6. Тѣлеснымъ ромбомъ называется тѣло, составленное изъ двухъ конусовъ, имѣющихъ общее основаніе, а вершины съ различныхъ сторонъ плоскости онаго, такъ что ихъ оси составляютъ одну прямую. стран. 4.

Положенія или начала.

1. Изъ линій, тѣже концы имѣющихъ, прямая есть наименьшая. 5.

2. Изъ кривыхъ линій, имѣющихъ общіе концы и выпуклыхъ съ одной и той же стороны, меньшая есть та, которая объемлется другою совсѣмъ, или нѣкопорою частію, имѣя остальную часть общую. 5.

3. Изъ поверхностей, имѣющихъ тѣже края и на одной плоскости, наименьшая есть плоскость. 5.

4. Изъ кривыхъ поверхностей, имѣющихъ общіе края на той же плоскости, и выпуклыхъ съ одной и той же стороны, меньшая есть та, которая объемлется другою совсѣмъ, или нѣкопорою частію, имѣя остальную часть общую. 5.

5. Изъ неравныхъ линій, неравныхъ поверхностей или неравныхъ тѣлъ, еслили избытокъ большаго предъ меньшимъ, будетъ совокупляемъ самъ съ собою; то онъ можетъ чрезъ сіе сдѣлаться больше всякой предложенной величины изъ рода тѣхъ, кои взаимно сравниваются. 5.

Предложенія.

1. Очершаніе многоугольника, вписаннаго въ кругъ, меньше окружности онаго. 6.

2. Очершаніе многоугольника, описаннаго около круга, больше окружности онаго. 6.

3. По даннымъ двумъ неравнымъ величинамъ, возможно найти двѣ прямыя неравныя такія, чтобы большая прямая къ меньшей имѣла меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей. 7.

4. По даннымъ двумъ неравнымъ величинамъ и кругу, возможно вписать многоугольникъ въ кругъ и около него описать другой, такіе, чтобы спора на описаннаго къ споронѣ вписаннаго имѣла меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей. спран. 8.

5. По даннымъ двумъ неравнымъ величинамъ и вырѣзку круга, возможно описать многоугольникъ около вырѣзка и въ немъ вписать другой, такіе, чтобы спора на описаннаго къ споронѣ вписаннаго имѣла меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей. 10.

6. По даннымъ двумъ неравнымъ величинамъ и кругу, возможно описать многоугольникъ около круга и въ немъ вписать другой, такіе, чтобы описанный къ вписанному имѣлъ меньшее отношеніе, нежели большая величина къ меньшей. 11.

Тоже будетъ и при вырѣзкѣ круга. 13.

По данному какому ниспъ пространству и кругу или вырѣзку онаго, возможно, вписывая въ кругъ или вырѣзкѣ, а попомъ въ оставшихся ошрѣзкахъ многоугольники равносторонные, получить напоследокъ такіе ошрѣзки круга или вырѣзка, кои будутъ меньше даннаго пространства. 13.

7. По данному пространству и кругу или вырѣзку, возможно описать около сего круга или вырѣзка многоугольникъ такой, коего, облегающіе кругъ или вырѣзокъ, ошрѣзки были бы меньше даннаго пространства. 13.

8. Если въ прямомъ конусѣ впишется пирамида; то поверхность ея, кромѣ основанія, равна преугольнику, имѣющему основаніе равное очерпанію основанія пирамиды, а высоту равную перпендикуляру, опъ вершины къ одной изъ споронъ основанія проведенному. 15.

9. Если около прямого конуса опишется пирамида; то поверхность ея, кромѣ основанія, равна

треугольнику, имѣющему основаніе равное очертанію ея основанія, а высоту равную сторонѣ конуса. стран. 17.

10. Если въ основаніи прямого конуса помѣстится прямая, и отъ концовъ ея до вершины протянутся также прямые: то треугольникъ, изъ нихъ составившійся, будетъ меньше поверхности конуса, которая между протянутыми до вершины. 19.

11. Если къ основанію прямого конуса проведутся касательныя, взаимно встрѣчающіяся, и отъ почекъ касанія и встрѣчи протянутся до вершины конуса прямые; то треугольники, изъ нихъ составившіеся, будутъ больше поверхности конуса, описанной прямыми протянутыми отъ почекъ касанія до вершины. 22.

12. Если на поверхности прямого цилиндра проведутся двѣ прямые: то поверхность цилиндра, ими описанная, будетъ больше параллелограмма содержаемаго сими же прямыми и соединяющими ихъ концы. 26.

13. Если на поверхности прямого цилиндра будутъ двѣ прямые, и чрезъ концы ихъ проведутся къ основаніямъ цилиндра касательныя, взаимно встрѣчающіяся: то параллелограммы, изъ нихъ составившіеся, будутъ больше поверхности цилиндра, описанной прямыми, кои на его поверхности. 30.

Слѣдственно, если въ прямомъ конусѣ впишется пирамида, то поверхность ея, кромѣ основанія, будетъ меньше конической поверхности: а если около него опишется, то будетъ больше. 33.

Также, если въ прямомъ цилиндрѣ впишется призма, то поверхность ея, сложенная изъ параллелограммовъ, будетъ меньше поверхности цилиндра, кромѣ основаній: а если около него опишется, то будетъ больше. 33 - 34.

14. Поверхность прямого цилиндра, кроме оснований, равна кругу, коего радиусъ есть средняя пропорціональная между стороною цилиндра и поперечникомъ его основанія. стр. 34.

15. Поверхность прямого конуса, кроме основанія, равна кругу, коего радиусъ есть средняя пропорціональная между стороною конуса и радиусомъ его основанія. 39.

16. Поверхность прямого конуса къ его основанію имѣетъ тоже отношеніе, что сторона конуса къ радиусу основанія. 44.

Лемма. Если въ параллелограммъ составятся около поперечника два параллелограмма съ дополненіями: то прямоугольникъ, содержащийся въ соприкосновенныхъ сторонахъ цѣлаго, равенъ прямоугольнику въ таковыхъ же сторонахъ одного изъ лежащихъ около поперечника и купно прямоугольнику содержащему въ сторонѣ другаго и въ прямой равной сторонѣ цѣлаго, на коемъ другая сторона послѣдняго, и сторонѣ параллельной перваго. 45.

17. Если прямой конусъ разсѣчется плоско-стію параллельною къ основанію: то коническая поверхность, что между параллельныхъ плоскостей, равна кругу, коего радиусъ есть средняя пропорціональная между оппозитною шѣмп плоскостями стороною конуса и прямою равною обоимъ радиусамъ круговъ, кои на оныхъ плоскостяхъ. 46.

Леммы. Оныя суть не что иное, какъ предложенія 11, 12, 13, 14 и 15, книги XII Эвклидовыхъ Началь. 47 - 48.

18. Если будутъ два прямые конуса такіе, что поверхность одного равна основанію другаго, и перпендикуляръ, проведенный отъ центра основанія къ сторонѣ перваго, равенъ высотѣ другаго: то конусы будутъ взаимно равны. 48.

19. Прямый ромбъ равенъ конусу, имѣющему основаніе равное поверхности одного изъ конусовъ

составляющихъ ромбъ, а высоту равную перпендикуляр, проведенному отъ вершины другого конуса на сторону первого. стран. 49.

20. Если конусъ разсѣчется плоскостію параллельною къ основанію, и на произшедшемъ кругѣ составится конусъ, имѣющій вершину въ центрѣ основанія, и произшедшій ромбъ отнимется отъ цѣлаго конуса: то остатокъ будетъ равенъ конусу, имѣющему основаніе равное конической поверхности, что между параллельныхъ плоскостей, а высоту равную перпендикуляр, отъ центра основанія къ сторонѣ конуса проведенному. 51.

21. Если прямого ромба одинъ конусъ разсѣчется плоскостію параллельною къ основанію, и на произшедшемъ кругѣ составится конусъ, имѣющій общую вершину съ другимъ конусомъ ромба, и произшедшій ромбъ отнимется отъ цѣлаго: то остатокъ будетъ равенъ конусу, имѣющему основаніе равное конической поверхности, что между параллельныхъ плоскостей, а высоту равную перпендикуляр, отъ вершины второго конуса къ сторонѣ первого проведенному. 53.

22. Если въ кругѣ впишется многоугольникъ чепносторонний и равносторонний, и протянутся въ семь многоугольникъ діагонали параллельныя къ одной изъ стягивающихъ двѣ соприкосновенныя его стороны: то всѣ діагонали къ поперечнику круга будутъ имѣть тоже отношеніе, что прямая, стягивающая безъ одной половину сторонъ, къ сторонѣ многоугольника. 55.

23. Если въ опискѣ круга впишется многоугольникъ, имѣющій стороны, кромѣ основанія, всѣ взаимно равныя и въ чепномъ числѣ, и протянутся параллельныя къ основанію описки діагонали многоугольника: то всѣ онѣ съ половиною основанія будутъ къ высотѣ описки имѣть тоже отношеніе, что прямая, проведенная отъ конца поперечника до

соприкосновенной стороны многоугольника, къ споронѣ его. сшран. 57.

24. Ежели въ наибольшемъ кругѣ шара впишется равносторонный многоугольникъ, коего число споронѣ дѣлимо на 4, и чрезъ обращеніе сего многоугольника впишется въ шарѣ шѣло: то поверхность сего шѣла будетъ меньше поверхности шара. 58.

25. Поверхность сказаннаго предъ симъ шѣла равна кругу, изъ радіуса коего квадраць равняется прямоугольнику, содержимому въ споронѣ многоугольника и въ прямой равной всѣмъ діагоналямъ параллельнымъ къ спягивающей двѣ соприкосновенныя его спороны. 60.

26. Поверхность шѣла вписаннаго, по сказанному (24), въ шарѣ, есть меньше, нежели чепырекрашный наибольшій кругъ онаго. 62.

27. Оная же вписанная фигура равна конусу, имѣющему основаніе равное ея поверхности, а высопу равную перпендикулярю, отъ центра шара къ одной изъ споронѣ производящаго многоугольника проведенному. 64.

28. Оная же фигура есть меньше нежели чепырекрашный конусъ, имѣющій основаніе наибольшій кругъ шара, а высопу радіусъ онаго. 67.

29. Ежели около наибольшаго круга шара опишется равносторонный многоугольникъ, коего число споронѣ дѣлимо на 4, и чрезъ обращеніе сего многоугольника опишется около шара шѣло: то поверхность сего шѣла будетъ больше поверхности шара. 68.

30. Поверхность, сказаннаго предъ симъ, шѣла равна кругу, изъ радіуса коего квадраць равняется прямоугольнику, содержимому въ споронѣ многоугольника и въ прямой равной всѣмъ діагоналямъ параллельнымъ къ спягивающей двѣ соприкосновенныя его спороны. 70.

31. Поверхность шѣла описаннаго , по сказанному (29), около шара, есть больше нежели четырехкратный наибольшій кругъ онаго. спиран. 71.

32. Она же описанная фигура равна конусу, имѣющему основаніе равное ея поверхности, а высоту равную радіусу шара, около котораго фигура описана. 72.

33. Она же фигура есть больше нежели четырехкратный конусъ, имѣющій основаніемъ наибольшій кругъ шара, а высоту радіусъ онаго. 72.

34. Ежели въ шарѣ впишется фигура, и около него опишется другая, чрезъ обращеніе подобныхъ многоугольниковъ прежде сказанныхъ (24 и 29); то поверхность фигуры описанной къ поверхности вписанной будетъ имѣть удвоенное отношеніе спороны многоугольника описаннаго къ споронѣ вписаннаго: а самыя фигуры будутъ взаимно въ упрощенномъ отношеніи тѣхъ же споронъ. 73.

35. Поверхность шара есть четырехкратная наибольшаго его круга. 76.

36. Шаръ есть четырехкратный конуса, имѣющаго основаніемъ наибольшій кругъ шара, а высоту радіусъ онаго. 79.

37. Шаръ къ цилиндру описанному имѣетъ отношеніе какъ 2 къ 3, и въ поверхностяхъ и въ шолстошахъ. 82.

38. Поверхность шѣла, въ шаровомъ опрѣзкѣ вписаннаго шакъ, какъ вписывали въ шарѣ, равна кругу, изъ радіуса коего квадрашъ равняется прямоугольнику содержимому въ споронѣ многоугольника производящаго, и въ прямой равной вѣсѣмъ его диагоналямъ параллельнымъ къ основанію, и половинѣ основанія опрѣзка. 84.

39. Ежели въ опрѣзкѣ наибольшаго круга шара впишется многоугольникъ равносторонный и чепносторонный, кромѣ основанія, и чрезъ обращеніе

сего многоугольника впишется въ шаровомъ опрѣзкѣ шѣла : то поверхность шѣла будетъ меньше поверхности опрѣзка. стран. 86.

40. Поверхность сказаннаго предъ симъ шѣла есть меньше круга , коего радіусъ равенъ прямой , проведенной отъ вершины опрѣзка до окружности его основанія. 87.

41. Оная же вписанная фигура , купно съ конусомъ , имѣющимъ съ нсю тоже основаніе , а вершину въ центрѣ шара , равна конусу , имѣющему основаніе равное поверхности фигуры , а высоту равную перпендикуляру , отъ центра шара къ сторонѣ производящаго многоугольника проведенному. 88.

42. Поверхность шѣла , подобнымъ образомъ описаннаго около шароваго опрѣзка или вырѣзка , есть больше поверхности сего опрѣзка. 91.

43. Поверхность сказаннаго предъ симъ шѣла равна кругу , изъ радіуса коего квадрасть равняется прямоугольнику , содержимому въ сторонѣ многоугольника и въ прямой равной всѣмъ параллельнымъ къ основанію діагоналямъ , и половинѣ сего основанія. 93.

44. Оная же поверхность больше круга , коего радіусъ равенъ прямой проведенной отъ вершины опрѣзка до окружности основанія его. 93.

45. А самая фигура , купно съ конусомъ , имѣющимъ основаніе кругъ около основанія многоугольника производящаго а вершину въ центрѣ шара , равна конусу , коего основаніе равно поверхности фигуры , а высота равна радіусу шара. 95.

46. Слѣдственно сказанная фигура съ конусомъ , есть больше конуса , имѣющаго основаніемъ кругъ , коего радіусъ равенъ прямой проведенной отъ вершины до окружности основанія опрѣзка , около котораго описана фигура , а высоту равную радіусу шара. 95.

47. Если въ шаровомъ вырѣзкѣ впишется фигура, и около него опишется другая, чрезъ обращеніе подобныхъ многоугольниковъ прежде сказанныхъ (39, 42); то поверхности фигуръ будутъ взаимно въ удвоенномъ отношеніи сторонъ производящихъ многоугольниковъ, а самая фигура въ утроенномъ отношеніи тѣхъ же сторонъ. стр. 96.

48 и 49. Поверхность шароваго ошрѣзка равна кругу, коего радіусъ равенъ прямой, проведенной опъ вершины ошрѣзка до окружности основанія его. 98 - 100.

50. Шаровый вырѣзокъ равенъ конусу, имѣющему основаніе равное поверхности ошрѣзка, а высоту равную радіусу шара. 101.

О ШАРѢ И ЦИЛИНДРѢ. Книга II.

Письмо Архимеда къ Доскеею о предмѣстѣ сей книги. 105.

Предложенія.

1. Найди плоское пространство равное поверхности даннаго шара. 106.

2. Найди шаръ равный данному конусу или цилиндру. 107.

3. Шаровый ошрѣзокъ равенъ конусу, имѣющему съ нимъ тоже основаніе, а высоту такую прямую, кошорая къ высотѣ ошрѣзка имѣетъ тоже отношеніе, что радіусъ шара, купно съ высотой остальнаго ошрѣзка, къ сей высотѣ. 109.

Слѣдственно, какъ ошрѣзокъ шара къ конусу имѣющему тоже основаніе и ту же высоту чпо ошрѣзокъ, такъ радіусъ шара съ высотой остальнаго ошрѣзка къ высотѣ онаго. 112.

4. Раздѣлишь данный шаръ такъ, чпобы поверхности ошрѣзковъ имѣли взаимно данное отношеніе. 115.

5. Раздѣлишь данный шаръ такъ, чѣобы опрѣзки имѣли взаимно данное отношеніе. стран. 117.

6. Соспавить опрѣзокъ шара, подобный данному и равный другому данному. 122.

7. Найди шаровый опрѣзокъ, подобный данному, а поверхностію равный другому данному же. 126.

8. Опъ даннаго шара отсѣчь опрѣзокъ, такъ чѣобы онъ къ конусу, имѣющему съ нимъ поже основаніе и шуже вышю, имѣлъ данное отношеніе. 129.

9. Ежели шаръ разсѣчется плоскостію не чрезъ центръ; то больший опрѣзокъ къ меньшему будетъ имѣть меньшее отношеніе, нежели удвоенное поверхности большаго къ поверхности меньшаго, а большее нежели полушорное. 131.

10. Изъ шаровыхъ опрѣзковъ, содержимыхъ въ равной поверхности, наибольшій есть полушаріе. 138.

ИЗМѢРЕНІЕ КРУГА.

Предложенія.

1. Кругъ равенъ прямоугольному треугольнику, коего одна изъ сторонъ, чѣо около прѣаго угла, равна радіусу круга, а другая его окружности. 142.

2. Кругъ къ квадрату изъ его поперечника имѣетъ отношеніе, почти какъ 11 къ 14. 143.

3. Окружность круга равна шремъ поперечникамъ и еще часни онаго, кошорая меньше седьмой а больше десяти семдесять первыхъ. 144.

Л Е М М Ы.

Предложенія.

1. Ежели въ двухъ кругахъ касательныхъ проводятся параллельные поперечники, и опъ концовъ ихъ до прикосновенія протянущся прямыя, то оныя составляютъ одну прямую. 150.

2. Ежели къ полукружію касаются двѣ прямыя въспѣрѣющіяся, и отъ одного прикосновенія на поперечникъ и на другую касательную опускаются перпендикуляры, и отъ конца послѣдняго до конца поперечника проведемъ прямая пресѣкающая первый перпендикуляръ; то оный разсѣчется по поламъ. 151.

3. Ежели изъ основанія отрѣзка круга поставимся перпендикуляръ, и возмемъ на большемъ отрѣзкѣ основанія равный меньшему и на большей дугѣ равная меньшей: то хорда, соотвѣтствующая остальной дугѣ, будетъ равна остальной части основанія. 152.

4. Фигура, называемая Арбелонъ, равна кругу, коего поперечникъ есть перпендикуляръ, возставленный изъ общей почки двухъ полукружій и оканчивающійся на полукружіи большемъ. 153.

5. Касательные круги, написанные между сказанными полукружіями и перпендикуляромъ, суть взаимно равны. 154.

6. Написавъ между таковыми же полукружіями касательный ко всѣмъ имъ кругъ, найти отношеніе поперечника полукружія большаго къ поперечнику круга касательнаго. 156.

7. Квадратъ описанный около круга есть двукратный квадрата въ немъ вписаннаго. 157.

8. Ежели отъ почки взятой внѣ круга проведемъ двѣ сѣкущія, одна проходящая а другая не проходящая чрезъ центръ, и сей послѣдней будетъ лишняя часть равна внутренней; то изъ дугъ, кон между сѣкущими, вогнутая будетъ прикрапанная выпуклой. 158.

9. Ежели въ кругѣ двѣ прямыя, непроходящія чрезъ центръ, взаимно пресѣкаются подъ прямыми углами; то изъ дугъ круга двѣ противоположныя равны двумъ таковымъ же. 159.

10. Ежели отъ почки взятой внѣ круга проведемъ двѣ касательныя и сѣкущая, и параллель-

ная къ ней хорда проходящая чрезъ конецъ касательной, и отъ другаго конца сей хорды до другаго прикосновенія протянется прямая пресѣкающая стѣющую въ нѣкоей точкѣ: по перпендикуляръ, изъ сей точки опущенный на хорду, разсѣкаетъ оную по поламъ. 159.

11. Ежели въ кругѣ двѣ прямыя взаимно пресѣкающіяся; по квадрашъ изъ хордъ всѣхъ чепырехъ дугъ круга равны квадрашъ изъ его поперечника. 161.

12. Ежели изъ точки взятой внѣ полукружія проведутся двѣ къ нему касательныя, а отъ прикосновеній до концовъ поперечника двѣ прямыя, взаимно пресѣкающіяся; по прямая, проведенная чрезъ пресѣченіе и первую точку, будетъ перпендикулярна къ поперечнику. 161.

13. Ежели въ кругѣ хорда и поперечникъ взаимно пресѣкающіяся, и отъ концовъ хорды опустятся на поперечникъ перпендикуляры: по ими ошнмущя отъ концовъ поперечника прямыя взаимно равныя. 163.

14. Фигура, называемая Салинонь, равна кругу, коего поперечникъ равенъ перпендикуляръ изъ середины большаго полукружія возставленному, и оканчивающемуся на семъ полукружіи и на среднемъ. 164.

15. Ежели отъ конца поперечника полукружія помѣстится въ немъ сторона пѣшиугольника, и дуга ей соопвѣшствующая раздѣлится по поламъ, и протянутся хорды сихъ двухъ дугъ и другой съ остальною, и верхняя изъ нихъ продолжится до встрѣчи съ продолженнымъ поперечникомъ, и наконецъ, отъ пресѣченія съ стороною опустится на поперечникъ перпендикуляръ: по прямая, имъ и продолженною хордою ошнимаемая, равна радіусу полукружія. 165.

Внѣшняя часть выше сказанной продолженной хорды равна также радіусу. 167.

ПРИМѢЧАНІЯ.

Объясненіе названій сѣченія остроугольнаго, тупоугольнаго и прямоугольнаго. 171.

Замѣчанія о кривыхъ, ломаныхъ и смѣшенныхъ линіяхъ. 172—174.

О доказательствѣ Архимедовыхъ началъ. 175—176.

Составивъ прямоугольный преугольникъ, имѣющій стороны около остраго угла равныя даннымъ прямымъ. 176.

Ежели въ пирамидѣ, стоящей на преугольномъ основаніи, боковые преугольники равнобедренные, то два изъ нихъ больше претяго. 178.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ меньшее отношеніе нежели претяя къ четвертой, и будетъ первая больше второй, то и претяя больше четвертой. 179.

Радіусъ основанія конуса къ его сторонамъ имѣетъ большее отношеніе, нежели ось центра высоты одного изъ преугольниковъ, на кои раздѣлился многоугольникъ равносторонный вписанный въ основаніи, къ высотѣ одного изъ преугольниковъ стоящихъ на многоугольникѣ пирамиды вписанной въ конусъ. 180.

Общее доказательство леммы при предлож. 16 кн. I. 181.

Ежели будутъ четыре равноразнствующія величины, изъ коихъ первая наибольшая; то первая къ четвертой имѣетъ отношеніе большее нежели упрощенное первая ко второй. 184.

Дополненіе къ доказательству предл. 50 188.

Сдѣлавъ цилиндръ полушорный даннаго цилиндра или конуса. 189.

Замѣчаніе о вопросѣ двухъ среднихъ пропорціональныхъ. 189.

Ежели двѣ прямыя разсѣчены каждая на двѣ части, имѣющія поже отношеніе; то квадраты изъ цѣлыхъ пропорціональны прямоугольникамъ въ частяхъ ихъ. 191.

Что значить половинное, полупорное, и проч. отношеніе? 197.

Ежели къ двумъ неравнымъ величинамъ приложатся равныя, то большая къ меньшей имѣетъ большее отношеніе, нежели сложенная къ сложенной. 197.

Ежели будутъ четыре прямыя такія, что первая ко второй имѣетъ меньшее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то прямоугольникъ въ крайнихъ меньше прямоугольника въ среднихъ. И обратно. 197—198.

Ежели прямая разсѣчена дважды на неравныя; то прямоугольникъ въ наименьшей и въ оспальной части будетъ меньше прямоугольника въ другихъ двухъ частяхъ цѣлой прямой. А прямоугольникъ въ равныхъ, ш. е. квадратъ изъ половины, наибольшій. 203—204.

Доказательство предложенія 3 Измѣренія круга, изображенное уравненіями. 211.

Окружность круга къ поперечнику имѣетъ отношеніе, почти какъ 22 къ 7. 219.

Доказательство вшораго случая пред. 1 Леммъ. 220.

Общее доказательство пред. 2 Леммъ. 221.

Ежели отъ шрехъ угловъ шреугольника проведутся къ шпоронамъ перпендикуляры, то всѣ они пресѣкутся въ одной шочкѣ. 222.

Ежели въ чешыреугольникъ, имѣющемъ соприкосновенныя двѣ равныя шпороны, будутъ углы имъ прилежащіе равны углу содержимому оспальными двумя шпоронами; то діагональ отъ него прошиянутая равна одной изъ прежде сказанныхъ шпоронъ. 223.

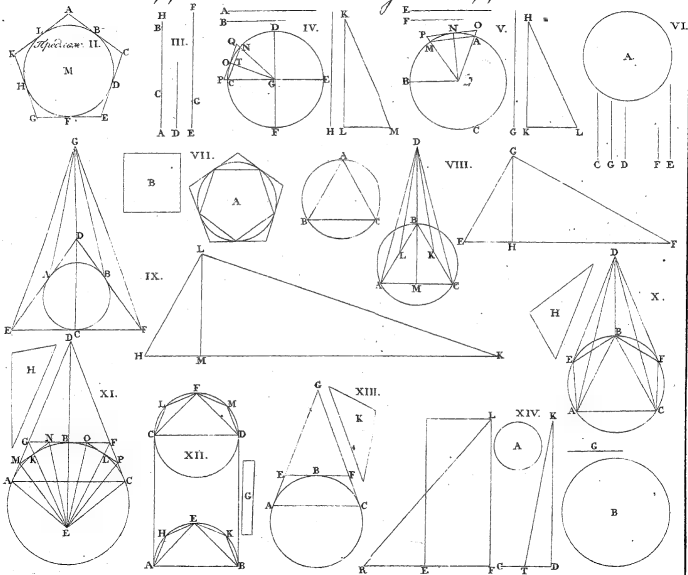
Замѣченные опечатки.

Стрн.	стр.	напечатано:	читай:
7	22	къ AG	къ AC
9	4	DGE	DGC
—	26	, нежели двукрап- ный уголь LKM	двукрапнаго угла LKM, а двукрапный угла TGC
11	2	коихъ НК	коихъ G
12	14	посему E	посему C
—	28	нежели E	нежели C
22	11	вершинъ	вершины
140	9	равна FN	равна EN
147	26	къ EG	къ EC
207	22	21 $\frac{1}{6} \frac{2}{15}$	почти 21 $\frac{1}{6} \frac{1}{15}$

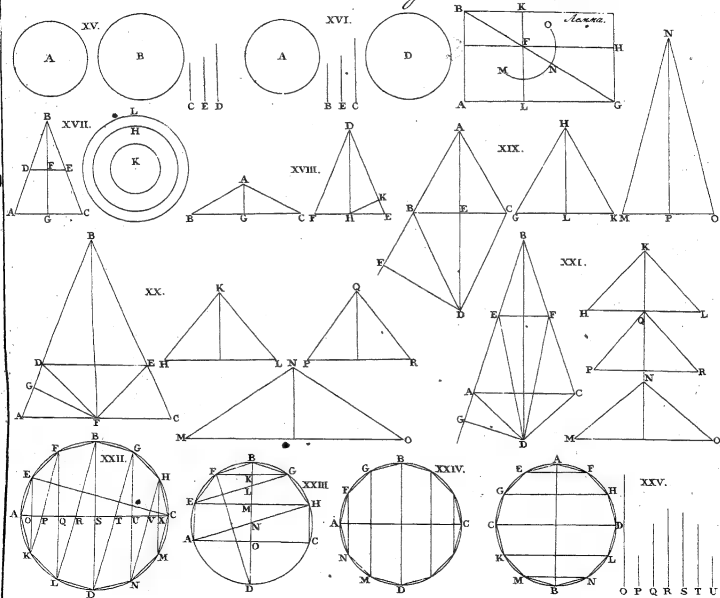
§ 33
1713

Д. Петрушевского
СПБ 1823г. Творения А. Демидова

Архимед о шаръ и цилиндръ книга I.

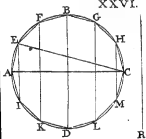


Архимеда о шарѣ и цилиндрѣ книга I.

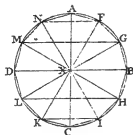


Архимеда о шарѣ и цилиндрѣ книга I.

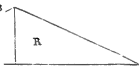
XXVI.



R



XXVII.



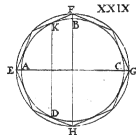
R

XXVIII.

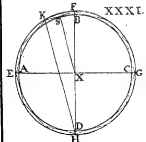


R O

XXIX.

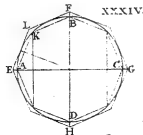


XXXI.



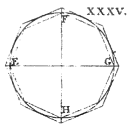
L

XXXIV.



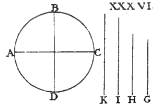
M N O P

XXXV.



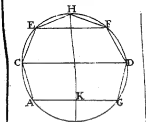
A B D C

XXXVI.



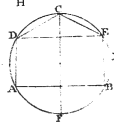
O

XXXVIII.

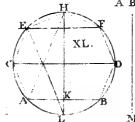


L M N O

XXXIX.



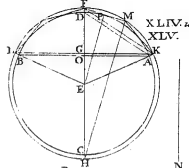
XL.



N

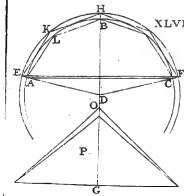
XLIV. u

XLV.



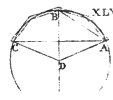
N

XLVII.



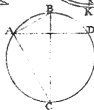
M N

XLVIII.



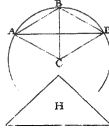
F

XLIX.



G F E

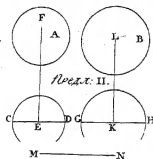
L.



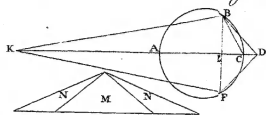
H

D F G E

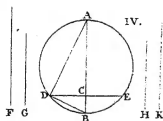
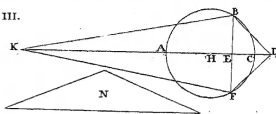
Архимеда о шаръ и цилиндръ книга II.



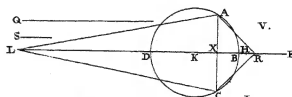
Предл. II.



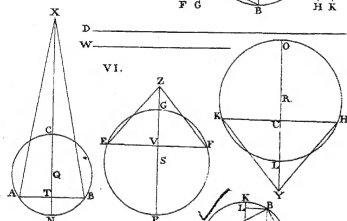
III.



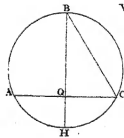
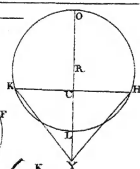
IV.



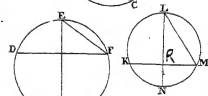
V.



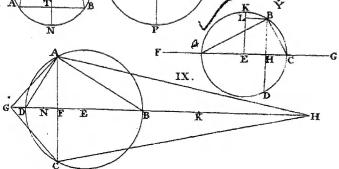
VI.



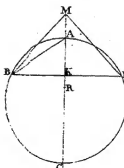
VII.



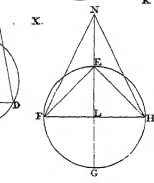
VIII.



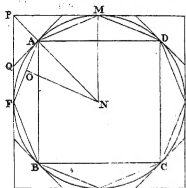
IX.



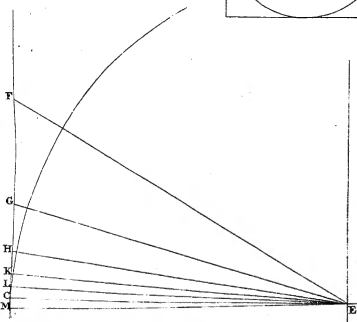
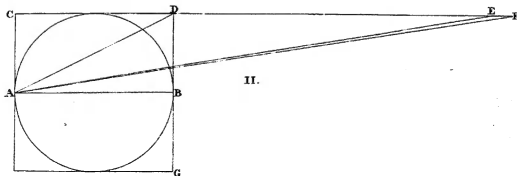
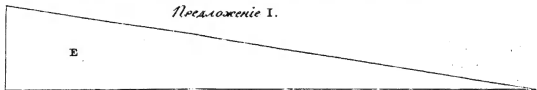
X.



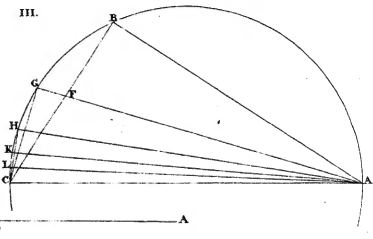
Архимеда измѣреніе круга.



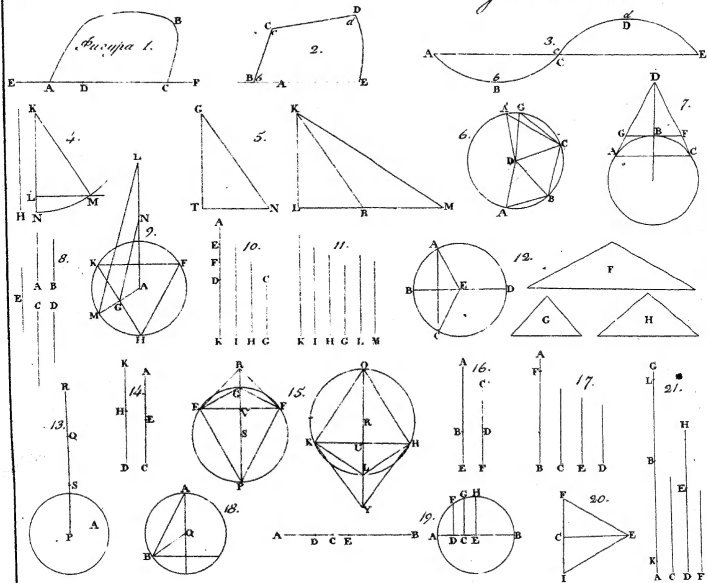
Предложеніе I.



III.



Прилож. къ книгѣ Архим. о шар. и цил. и къ изм. кр.



Архитектурные Леммы.

